

Professor: Rômulo Garcia

Email: machadogarcia@gmail.com

Conteúdo Programático: Análise Combinatória - Outros Métodos de Contagem

Material exclusivo para preparação do vestibular para o IME

Módulo 1 – Combinações Completas

De quantos modos podemos comprar 3 doces em uma padaria que tem 4 tipos de doces diferentes?

A solução para esse problema não é $C_{4,3}$. Seria, se ele afirmasse que deveríamos escolher 3 doces DIFERENTES sabendo que temos a nossa disposição 4 tipos diferentes. Nesse caso, de 4 elementos diferentes, deveríamos escolher 3 desse elementos (sem que a ordem a ordem de escolha importe) e isso pode ser feito de $C_{4,3}$.

A resposta para esse caso é $CR_{4,3}$, isto é, de 4 tipos de doces diferentes queremos escolher 3 tipos de doces não, necessariamente, distintos.

Suponha que temos a nossa disposição 4 tipos de doces. A saber: Brigadeiro (B), cajuzinho (C), josefina (J) e sonho (S). Podemos escolher 3 tipos da seguinte forma:

B B B	B B C	C C B	J J B	S S B	B C J
C C C	B B J	C C J	J J C	S S C	B C S
J J J	B B S	C C S	J J S	S S J	B J S
S S S					C J S

Essas são as $CR_{4,3} = 20$ combinações completas possíveis para esse caso.

Podemos pensar nesse problema da seguinte forma:

Seja a equação $B + C + J + S = 3$, com B, C, J, S naturais. Podemos interpretar que cada solução para essa equação linear representa uma possível forma de escolhermos os 3 doces. Por exemplo, a solução (1, 0, 0, 2) significa que desses 4 doces que temos a disposição queremos comprar 1 doce B e 2 doces S (é o caso B B S, descrito acima). Agora, resta sabermos como determinamos o total de soluções inteiras e não negativas de uma equação linear da forma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n = p$, com x_i natural, sendo i natural, $1 \leq i \leq n$.

OBSERVAÇÃO:

$C_{n,p}$ é o total de possibilidades de escolhermos p elementos DISTINTOS de um total de n elementos distintos dados.

$CR_{n,p}$ é o total de possibilidades de escolhermos p elementos DISTINTOS OU NÃO DISTINTOS de um total de n elementos distintos dados ou $CR_{n,p}$ é o número de soluções da equação linear da forma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n = p$ em inteiros não negativos.

Agora, vamos resolver a equação $B + C + J + S = 3$ em inteiros não negativos. Observe o esquema a seguir:

$$B + C + J + S = 3$$

| + | + + (isso significa a solução B = 1, C = 1, J = 0 e S = 1)
+ || + || + (isso significa a solução B = 0, C = 2, J = 2 e S = 0)

Para cada mudança de posição desses 6 símbolos, sendo 3 sinais (|) e 3 sinais (+) temos uma e somente uma nova solução para essa equação. Resta-nos, agora, determinarmos de quantos modos podemos TROCAR DE LUGAR esses 6 símbolos, ou seja, devemos PERMUTAR esse 6 símbolos, sendo que um deles aparece repetido 3 vezes e o outro também 3 vezes. Logo, o total de permutações é $P_{6,3}^6 = C_{6,3} = CR_{4,3} = 6!/3!.3! = 20$. Portanto, essa equação tem 20 soluções nos inteiros não negativos.

Agora, analisaremos o total de soluções naturais da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n = p$. Nesse caso, teríamos p sinais (|) e $n - 1$ sinais (+). Logo, o total de soluções naturais dessa equação seria a permutação de $p + n - 1$ símbolos sendo que um deles aparece repetido p vezes e o outro $n - 1$ vezes, ou seja, o total de soluções é dado por:

$$P_{p+n-1}^{p+n-1} = (p+n-1)!/p!.(n-1)! = \mathbf{C_{p+n-1,p} = CR_{n,p}}$$

ATENÇÃO: Procure sempre usar o raciocínio das equações lineares para solucionar um problema de combinações completas. Nos exercícios, termos exemplos em que poderemos limitar algumas (ou até mesmo todas) das incógnitas da equação inferiormente ou superiormente. Veremos, também, as inequações lineares.

Módulo 2 – Primeiro Lema de Kaplansky

De quantos modos podemos formar um subconjunto com 4 elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ de modo que não haja números consecutivos?

Devemos usar o seguinte raciocínio:

$\{1, 3, 5, 9\}$ – representação: $+ - + - - - +$

$\{2, 4, 6, 8\}$ – representação: $- + - + - + -$

$\{2, 5, 7, 8\}$ – representação: $- + - - + - + -$ (observe que esse caso não serve para o problema, pois 2 sinais $+$ juntos significa que teremos números consecutivos)

Observe que sempre que trocarmos de lugar esses 9 símbolos, sendo 5 sinais $(-)$ e 4 sinais $(+)$ de modo que não tenhamos 2 sinais $(+)$ juntos, teremos uma e somente uma representação para um possível subconjunto da forma solicitada. Assim, resta solucionarmos o problema:

De quantos modos podemos permutar 9 símbolos, sendo 5 sinais $(-)$ e 4 sinais $(+)$ de modo que não tenhamos 2 sinais $(+)$ juntos?

$o - o - o - o - o - o - o$

Observe que podemos colocar 4 sinais $(+)$ em 6 possíveis lugares, ou seja, devemos escolher 4 dos 6 lugares vagos (representado pelo símbolo “o”) para colocarmos os sinais $(+)$ e isso pode ser feito de $C_{6,4}$ modos distintos. Logo, podemos afirmar que a solução do problema proposto é dado por $C_{6,4}$.

Agora, usando mesmo raciocínio, vamos determinar a solução do seguinte problema:

De quantos modos podemos selecionar um subconjunto com p elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ de modo que não haja números consecutivos?

Nesse caso, teremos que verificar de quantos modos podemos permutar n símbolos, sendo p sinais $(+)$ e $n - p$ sinais $(-)$ sem que haja sinais $(+)$ juntos. Teremos $n - p + 1$ lugares para escolhermos p para colocarmos os p sinais $(+)$ e isso pode ser feito de $C_{n-p+1,p}$, que é a solução para o problema proposto.

Primeiro Lema de Kaplansky:

Seja $f(n, p)$ o número de possibilidades de escolher um subconjunto com p elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ de modo que não haja números consecutivos. Isso pode ser feito de $C_{n-p+1,p}$ modos distintos, ou seja,

$$f(n, p) = C_{n-p+1,p}.$$

Módulo 3 – Segundo Lema de Kaplansky

Observe essa questão que apareceu no vestibular do IME:

12 cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos 12 cavaleiros considera seus vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de cinco cavaleiros para libertar uma princesa. Nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.

Vamos pensar que os cavaleiros estão na mesa como se formassem um relógio, numerando os de 1 a 12, é claro. Iremos separar o problema em 2 casos:

i) Um cavaleiro específico participa. Sem perda de generalidade, vamos supor o cavaleiro 12.

Como o cavaleiro 12 participa, obrigatoriamente, o 11 e o 1 não podem participar do grupo que tem o cavaleiro 12, pois eles são vizinhos e, consequentemente, inimigos. Agora, temos que selecionar mais 4 cavaleiros dentre os 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 de modo que não tenhamos dois vizinhos. Teremos que escolher 4 (simbolizados por $+$) e restarão 5 (simbolizados por $-$). Por exemplo, o caso $+ - - + - + - - +$ é válido e significa que foram escolhidos os cavaleiros 2, 5, 7 e 10. Já o caso $- - + - + - + -$ não é válido, pois ele representa a escolha dos cavaleiros 4, 6, 8 e 9 (dois vizinhos: 8 e 9). Com isso, devemos permutar os 4 sinais $(+)$ e os 5 sinais $(-)$ de modo que não tenhamos dois sinais $(+)$ juntos e isso pode ser feito de $C_{6,4} = 15$ formas diferentes.

ii) O cavaleiro 12 não participa.

Como o cavaleiro 12 não participa, devemos escolher 5 cavaleiros dentre todos os outros 11 (1, 2, 3, ..., 10, 11). Teremos que escolher 5 (simbolizados por +) e restarão 6 (simbolizados por -). Por exemplo, o caso + - - + - - + - + é válido e significa que foram escolhidos os cavaleiros 1, 4, 6, 9 e 11. Com isso, devemos permutar os 5 sinais (+) e os 6 sinais (-) de modo que não tenhamos dois sinais + juntos e isso pode ser feito de $C_{7,5} = 21$ formas diferentes. Logo, temos $15 + 21 = 36$ formas distintas de escolher 5 dentre os 12 cavaleiros com as restrições impostas pelo problema.

Agora, usando mesmo raciocínio, vamos determinar a solução do seguinte problema:

De quantos modos podemos selecionar um subconjunto com p elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$, sabendo que os elemento 1 e n são consecutivos, de modo que não haja números consecutivos?

Vamos separar esse problema em dois casos:

i) O elemento 1 figura no subconjunto com p elementos:

Nesse caso, teremos que verificar de quantos modos podemos escolher os outros $p - 1$ elementos do conjunto $\{3, 4, 5, \dots, n - 1\}$ (pois, como o 1 figura, o 2 e o n não podem figurar), não podendo ser escolhidos elementos consecutivos. Assim, o número de modos que isso pode ser feito é:

$$f(n - 3, p - 1) = C_{n-p-1, p-1}$$

ii) O elemento 1 não figura no subconjunto com p elementos:

Nesse caso, teremos que verificar de quantos modos podemos escolher os p elementos do conjunto $\{2, 3, 4, 5, \dots, n\}$, não podendo ser escolhidos elementos consecutivos. Assim, o número de modos que isso pode ser feito é:

$$f(n - 1, p) = C_{n-p, p}$$

Portanto, de (i) e (ii) segue que a solução desse problema proposto é dada por:

$$C_{n-p-1, p-1} + C_{n-p, p} = \frac{n}{n-p} \cdot C_{n-p, p}$$

Esse problema do IME aqui apresentado nada mais é que uma aplicação direta do Segundo Lema de Kaplansky (o número de k - subconjuntos de $\{1, 2, 3, \dots, n - 1, n\}$ nos quais não há números consecutivos, considerando 1 e n

como consecutivos, é igual a $\frac{n}{n-p} \cdot C_{n-p, p}$. Logo, temos para solução $\frac{12}{12-5} \cdot C_{12-5, 5} = 36$. Logo, temos 36 formas distintas de escolher 5 dentre os 12 cavaleiros com as restrições impostas pelo problema.

Segundo Lema de Kaplansky:

Seja $g(n, p)$ o número de possibilidades de escolher um subconjunto com p elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$, sabendo que os elemento 1 e n são consecutivos, de modo que não haja números consecutivos. Isso pode ser feito de

$$\frac{n}{n-p} \cdot C_{n-p, p} \text{ modos distintos, ou seja,}$$

$$g(n, p) = \frac{n}{n-p} \cdot C_{n-p, p}$$

Módulo 4 – Além dos Lemas de Kaplansky – Um raciocínio mais abrangente

Poderíamos pensar em um suposto “Terceiro Lema de Kaplansky” que não existe. Por exemplo, como poderíamos solucionar problemas do tipo:

De quantos modos podemos selecionar um subconjunto com 4 elementos do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 12\}$ de modo que eles se diferem de ao menos 3? Por exemplo, se o número 4 figurar no subconjunto além do 3 e o 5 não poderão figurar o 2 e o 6. Isto é, dado um elemento x , não podemos ter no mesmo conjunto os elementos $x - 2, x - 1, x + 1$ e $x + 2$.

Mostraremos um belo método de solução para esse tipo de problema:

+ - - + - - + - - + : Chamaremos isso de configuração mínima, onde o sinal (+) exibe um elemento que queremos no subconjunto e o sinal (-) exibe um elemento que não queremos no subconjunto. O fato de sempre termos entre dois sinais (+) dois sinais (-) nos garante que nunca poderemos escolher dois números cuja diferença entre ele seja menor que 3.

Nesse conjunto A queremos escolher 4 elementos – 4 sinais (+) – e, conseqüentemente, deixaremos de escolher 8 elementos – 8 sinais (-) – (com as condições impostas pelo enunciado). Mas, a configuração mínima usa 4 sinais (+) e 6 sinais (-), restando, portanto, 2 sinais (-) para colocarmos em 5 possíveis lugares (antes, entre ou depois dos sinais (+)). Assim, nosso problema fica resumido ao seguinte: Quantas soluções inteiras e não negativas a equação

linear $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2$ (*), com x_i natural, sendo i natural, $1 \leq i \leq 5$ possui? Sabemos que a resposta pra esse problema é dada por $C_{6,2}$ ou $CR_{5,2}$, pois queremos escolher 5 lugares para 2 sinais (+).

Por exemplo, se escolhermos o subconjunto {2, 6, 9, 12} significa que a solução da equação (*) é (1, 1, 0, 0, 0) o que nos daria a configuração - + - - - + - - - +. Caso escolhêssemos o subconjunto {1, 5, 8, 11} significa que a solução da equação (*) é (0, 1, 0, 0, 1) o que nos daria a configuração + - - - + - - - + - -. Logo, a solução para o problema proposto é $C_{6,2} = CR_{5,2} = 15$.

Esse raciocínio pode ser aplicado em outros problemas, mas devemos sempre ficar atentos para a configuração mínima.

Vejamos esse exemplo:

De quantos modos podemos selecionar um subconjunto com 5 elementos do conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 25\}$ de modo que eles se diferem de ao menos 4?

Nesse caso, a configuração mínima é a seguinte:

+ - - - + - - - + - - - + - - - +

Nesse conjunto A queremos escolher 5 elementos – 5 sinais (+) – e, conseqüentemente, deixaremos de escolher 20 elementos – 20 sinais (-) – (com as condições impostas pelo enunciado). Mas, a configuração mínima usa 5 sinais (+) e 12 sinais (-), restando, portanto, 8 sinais (-) para colocarmos em 6 possíveis lugares (antes, entre ou depois dos sinais (+)). Assim, nosso problema fica resumido ao seguinte: Quantas soluções inteiras e não negativas a equação linear $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 8$ (*), com x_i natural, sendo i natural, $1 \leq i \leq 6$ possui? Sabemos que a resposta pra esse problema é dada por $C_{13,8} = CR_{6,8} = 1287$, pois queremos escolher 6 lugares para 8 sinais (-).

Como esse raciocínio, o Lema de Kaplansky passa a ser apenas um problema desse tipo com uma configuração mínima da forma + - + - + - + - + ... + - +.

Módulo 5 – O Princípio da Inclusão – Exclusão

Esse princípio é usado quando queremos contar o total de elementos que pertencem à união de vários conjuntos, sendo eles, não necessariamente, disjuntos.

Para dois conjuntos, o princípio afirma que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Devemos ficar bem atentos, pois $n(A \cup B)$ representa o número de elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A e B. Quando contamos o elementos de $A \cup B$, contamos todos o elementos de A e todos os elementos de B. Mas, é fácil observar que os elementos de $A \cap B$ foram contados 2 vezes (uma em A e outra em B). Logo, devemos descontar uma das duas contagens desses elementos e, assim, obtemos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Para três conjuntos, o princípio afirma que:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Para quatro conjuntos, o princípio afirma que:

$$n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(A \cap D) - n(B \cap C) - n(B \cap D) - n(C \cap D) + n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) + n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D) - n(A \cap B \cap C \cap D)$$

Resumindo, o número de elemento da união é obtido quando somamos os elementos de cada conjunto, subtraímos o número de elementos das interseções 2 a 2, somamos o número de elementos das interseções 3 a 3, subtraímos o número de elementos das interseções 4 a 4 e, assim, sucessivamente.

Vejamos um exemplo:

Quantos são os anagramas da palavra CADERNO que têm C em 1º lugar, ou A em 2º lugar, ou D em 3º lugar ou E em 4º lugar?

Inicialmente, definiremos os conjuntos:

A1: conjunto cujos elementos são os anagramas da palavra CADERNO que têm a letra C em 1º lugar

A2: conjunto cujos elementos são os anagramas da palavra CADERNO que têm a letra A em 2º lugar

A3: conjunto cujos elementos são os anagramas da palavra CADERNO que têm a letra D em 3º lugar

A4: conjunto cujos elementos são os anagramas da palavra CADERNO que têm a letra E em 4º lugar

Queremos determinar $n(A1 \cup A2 \cup A3 \cup A4)$. Temos:

$$n(A1) = n(A2) = n(A3) = n(A4) = P_6 = 6! = 720 \text{ (fixar uma letra e permutar as 6 demais)}$$

$$n(A1 \cap A2) = n(A1 \cap A3) = n(A1 \cap A4) = n(A2 \cap A3) = n(A2 \cap A4) = n(A3 \cap A4) = P_5 = 5! = 120 \text{ (fixar duas letras e permutar as demais 5)}$$

$$n(A1 \cap A2 \cap A3) = n(A1 \cap A2 \cap A4) = n(A1 \cap A3 \cap A4) = n(A2 \cap A3 \cap A4) = P_4 = 4! = 24 \text{ (fixar três letras e permutar as demais 4)}$$

$$n(A1 \cap A2 \cap A3 \cap A4) = P_3 = 3! = 6 \text{ (fixar 4 e permutar as demais 3)}$$

Pelo Princípio da Inclusão – Exclusão, temos:

$$n(A1 \cup A2 \cup A3 \cup A4) = 4 \cdot 720 - 6 \cdot 120 + 4 \cdot 24 - 6 = 2250. \text{ Logo, temos 2250 anagramas da palavra CADERNO com as restrições impostas pelo enunciado.}$$

Observe agora esse exemplo:

Quantos números de 6 algarismos se pode formar a partir dos algarismos do número 1233145254 de modo que não haja dois algarismos iguais juntos?

Em um número de seis algarismos podem figurar 1, 2 ou 3 pares de algarismos iguais. Assim, vamos separar esse problema em 3 casos:

i) Um par de algarismos iguais e outros 4 algarismos distintos:

Um par se pode escolher de $C_{5,1}$ modos. O número de permutações de 4 algarismos distintos e 2 iguais é igual a $P_{6,2}^{2,2} = 6!/2! = 360$. Entre elas, temos $5! = 120$ permutações em que os algarismos iguais estão juntos. Logo, temos $C_{5,1} \cdot (360 - 120) = 1200$ números.

ii) Dois pares de algarismos iguais e outros 2 algarismos distintos:

Dois pares de algarismos iguais podem ser escolhidos de $C_{5,2} = 10$ modos, assim temos $C_{3,2} = 3$ modos para escolher os outros 2 algarismos. O total de permutações desses algarismos é $P_{6,2}^{2,2} = 6!/2!.2! = 180$, sendo que em $2.5!/2! = 120$ dessas permutações temos, ao menos, um par de algarismos juntos e em $4! = 24$ casos temos 2 pares. Em virtude da fórmula da união entre dois conjuntos, segue que temos $10 \cdot 3 \cdot (180 - 20 + 24) = 2520$ números.

iii) Três pares de algarismos iguais:

Analogamente, temos $C_{5,3} \cdot (6!/(2!)^3 - 3.5!/(2!)^2 + 3.4!/2! - 3!) = 300$ números. (Pense nesse caso e tente visualizar o Princípio da Inclusão – Exclusão).

Portanto, de (i), (ii) e (iii) obtemos 4020 números.

Módulo 6 – Permutações Caóticas

De quantas formas podemos permutar os algarismos do número 1234 de modo que nenhum número ocupe sua posição inicial?

Podemos observar que o número 2341 satisfaz o enunciado, mas o número 2431 não, pois o 3 ocupa a posição inicial.

Inicialmente, definiremos os conjuntos:

A1: conjunto cujos elementos são as permutações do número 1234 que têm o algarismo 1 em 1º lugar

A2: conjunto cujos elementos são as permutações do número 1234 que têm o algarismo 2 em 2º lugar

A3: conjunto cujos elementos são as permutações do número 1234 que têm o algarismo 3 em 3º lugar

A4: conjunto cujos elementos são as permutações do número 1234 que têm o algarismo 4 em 4º lugar

Precisamos determinar $n(A1 \cup A2 \cup A3 \cup A4)$, pois de todas as permutações possíveis pra esse número ($4!$) devemos excluir aquelas que têm 1 em 1º lugar, ou 2 em 2º lugar, ou 3 em 3º lugar ou 4 em 4º lugar. Assim, devemos determinar o valor de $4! - n(A1 \cup A2 \cup A3 \cup A4)$. Temos:

$n(A1) = n(A2) = n(A3) = n(A4) = P_3 = 3! = 6$ (fixar um algarismo e permutar os 3 demais)

$n(A1 \cap A2) = n(A1 \cap A3) = n(A1 \cap A4) = n(A2 \cap A3) = n(A2 \cap A4) = n(A3 \cap A4) = P_2 = 2! = 2$ (fixar dois algarismos e permutar os demais 2)

$n(A1 \cap A2 \cap A3) = n(A1 \cap A2 \cap A4) = n(A1 \cap A3 \cap A4) = n(A2 \cap A3 \cap A4) = P_1 = 1! = 1$ (fixar três algarismos)

$n(A1 \cap A2 \cap A3 \cap A4) = 1$ (fixar 4 algarismos)

Pelo Princípio da Inclusão – Exclusão, temos:

$n(A1 \cup A2 \cup A3 \cup A4) = 4 \cdot 6 - 6 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 1 = 15$. Logo, temos $4! - 15 = 24 - 15 = 9$ possíveis números que satisfazem a condição imposta pelo enunciado.

A saber, as permutações caóticas do número 1234 são:

2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4312, 4321

Uma permutação de n elementos é dita caótica (ou desordenada) quando nenhum de seus elementos está na posição inicial. Podemos e iremos trabalhar com as permutações caóticas como sendo nada mais do que um caso do Princípio da Inclusão – Exclusão, como ocorreu no exemplo anterior, onde resolvemos um problema típico de permutação caótica usando o raciocínio do Princípio da Inclusão – Exclusão.

O número de Permutações Caóticas de $(1, 2, 3, \dots, n)$ é dado por:

$Kn = n! \cdot [1/0! - 1/1! + 1/2! - 1/3! + \dots + (-1)^n/n!]$

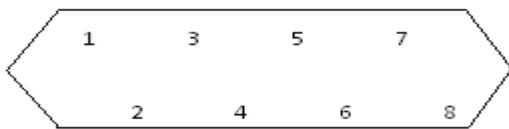
Com isso, a solução do exemplo anterior fica assim:

$K4 = 4! \cdot (1/0! - 1/1! + 1/2! - 1/3! + 1/4!) = 24 \cdot (1 - 1 + 1/2 - 1/6 + 1/24) = 9$.

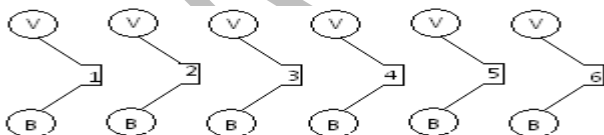
IMPORTANTE: Kn é o inteiro mais próximo de $n!/e$.

Módulo 7 – Todas as questões de Análise Combinatória que apareceram no vestibular do IME

1. (52–53) Num congresso há 102 representantes do partido A e 81 representantes do partido B. Para uma determinada sessão, foram convocados 99 elementos do partido A e 79 do partido B. De quantas maneiras poderia ter sido efetuada tal convocação?
2. (64–65) Dados 20 pontos do espaço, dos quais não existem 4 coplanares, quantos planos ficam definidos?
3. (66–67) De quantas maneiras 3 rapazes e 2 moças podem ocupar 7 cadeiras em fila, de modo que as moças sentem juntas umas das outras, e os rapazes juntos uns dos outros?
4. (70–71) 5 rapazes e 5 moças devem posar para uma fotografia, ocupando 5 degraus de uma escadaria, de forma de cada degrau fique um rapaz e uma moça. De quantas maneiras diferentes podemos arrumar este grupo?
5. (72–73) Considere os algarismos 1, 2, 3, 4, 5. Uma das permutações possíveis desses algarismos origina o número 42351. Determine a soma dos números formados, quando os algarismos são permutados de todos os modos possíveis.
6. (77–78) Mostre que, em toda reunião constituída de 6 pessoas, uma das hipóteses necessariamente ocorre (podendo ocorrerem ambas):
I) Existem 3 pessoas que se conhecem mutuamente (isto é, das 3 cada duas se conhecem).
II) Existem 3 pessoas que se desconhecem mutuamente (isto é, das 3 cada duas se desconhecem).
7. (78–79) Um elevador com 7 pessoas partem do andar térreo de um prédio e faz 4 paradas em andares diferentes, determinar de quantas maneiras diferentes, todas aquelas 7 pessoas podem desembarcar até a 4ª parada, inclusive.
8. (79–80) Seja um barco com 8 lugares, numerados como no diagrama seguinte:



- Há 8 remadores disponíveis para guarnecê-lo, com as seguintes restrições: Os remadores A e B só podem sentar no lado ímpar e o remador C, no lado par. Os remadores D, E, F, G, H podem ocupar quaisquer posições. Quantas configurações podem ser obtidas com o barco totalmente guarnecido?
9. (80–81) O professor Sah Bido quer oferecer jantares para 3 alunos de cada vez. O professor tem 7 alunos e quer oferecer 7 jantares, com a restrição de que um mesmo par de alunos não pode ser convidado para mais de um jantar, isto é, se os alunos A, B e C comparecerem a um jantar, então a presença do aluno A, por exemplo, em outro jantar, impedirá a presença de C ou de B, neste jantar. Chamando-se de programa a um conjunto de 7 jantares nas condições especificadas, pergunta-se: quantos programas diferentes poderão ser formados?
 10. (81–82) Deseja-se transmitir sinais luminosos de um farol, representado pela figura abaixo. Em cada um dos seis pontos de luz do farol existem uma lâmpada branca e uma vermelha. Sabe-se que em cada ponto de luz não pode haver mais de uma lâmpada acesa e que pelo menos três pontos de luz devem ficar iluminados. Determine o número total de configurações que podem ser obtidas.



11. (82–83) Uma rua possui um estacionamento em fila com N vagas demarcadas junto ao meio-fio de um dos lados. N automóveis, numerados de 1 a N, devem ser acomodados, sucessivamente, pela ordem numérica no estacionamento. Cada carro deve justapor-se a outro já estacionado, ou seja, uma vez estacionado o carro 1 em qualquer uma das vagas, os seguintes se vão colocando imediatamente à frente do carro mais avançado ou atrás do mais recuado. Quantas configurações distintas podem ser obtidas desta maneira? A figura abaixo mostra uma das disposições possíveis.



12. (84–85) Um exame vestibular se constitui de 10 provas distintas, 3 das quais da área de Matemática. Determine de quantas formas é possível programar a seqüência das 10 provas, de maneira que duas provas da área de Matemática não se sucedam.

13. (85–86) 12 cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos 12 cavaleiros considera seus vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de cinco cavaleiros para libertar uma princesa. Nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.

14. (87–88) Considere um torneio de xadrez com 10 participantes. Na primeira rodada cada participante joga somente uma vez, de modo que há 5 jogos realizados simultaneamente. De quantas formas distintas esta primeira rodada pode ser realizada? Justifique sua resposta.

15. (88–89) Em cada uma das faces de um cubo constrói-se um círculo e em cada círculo marcam-se n pontos. Unindo-se estes pontos

a) Quantas retas, não contidas numa mesma face do cubo, podem ser formadas?

b) Quantos triângulos, não contidos numa mesma face do cubo, podem ser formados?

c) Quantos tetraedros, com base numa das faces do cubo, podem ser formados?

d) Quantos tetraedros, com todos os vértices em faces diferentes, podem ser formados?

Obs.: Suponha que, se 4 pontos não pertencem a uma mesma face, então não são coplanares.

16. (89–90) Ligando as cidades A e B existem duas estradas principais. Dez estradas secundárias de mão dupla, ligam as duas estradas principais, como mostra a figura. Quantos cominhos, sem auto-interseções, existem de A até B?



Obs: Caminho sem auto-interseções é um caminho que não passa por um ponto duas ou mais vezes.

17. (89–90) IMEBOL é um jogo de três jogadores. Em cada partida o vencedor marca a pontos, o segundo colocado marca b pontos e o terceiro colocado marca c pontos, onde $a > b > c$ são inteiros positivos. Certo dia, Marcos, Flávio e Ralph resolvem jogar IMEBOL e após algumas partidas a soma dos pontos foi: Marcos: 20, Flávio: 10, Ralph: 9. Sabe-se que Flávio venceu a segunda partida. Encontre quantos pontos cada um marcou em cada partida disputada.

18. (90–91) Dado o conjunto $A = \{1, 2, 3, \dots, 102\}$, pede-se o número de subconjuntos de A , com três elementos, tais que a soma destes a soma seja um múltiplo de 3.

19. (90–91) A coleção de selos de Roberto está dividida em três volumes. Dois décimos do total de selos estão no primeiro volume, alguns sétimos do total estão no segundo volume e 303 selos estão no terceiro volume. Quantos selos Roberto tem?

20. (91–92) Calcule quantos números naturais de 3 algarismos distintos existem no sistema de base 7?

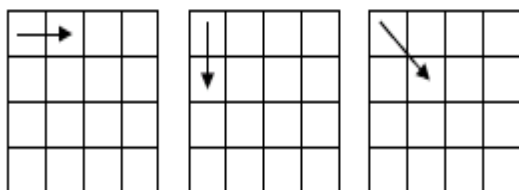
21. (92–93) Numa escola há 15 comissões, todas com igual número de alunos. Cada aluno pertence a duas comissões e cada duas comissões possui exatamente um membro em comum. Todos os alunos participam.

a) Quantos alunos têm a escola?

b) Quantos alunos participam de cada comissão?

22. (93–94) Seja um octógono convexo. Suponha que quando todas as suas diagonais são traçadas, não há mais de duas diagonais se interceptando no mesmo ponto. Quantos pontos de interseção (de diagonais) existem neste octógono?

23. (95–96) É dado um tabuleiro quadrado 4×4 . Deseja-se atingir o quadrado inferior direito a partir do quadrado superior esquerdo. Os movimentos permitidos são os representados pelas setas:



De quantas maneiras isto é possível?

24. (96–97) Em cada uma das 6 (seis) faces de um cubo, construiu-se uma circunferência, onde foram marcados n pontos. Considerando que 4 (quatro) pontos não pertencentes à mesma face, não sejam coplanares, quantas retas e triângulos, não contidos nas faces desse cubo, são determinados pelos pontos.

25. (97–98) Uma embarcação deve ser tripulada por oito homens, dois dos quais só remam do lado direito e apenas um, do lado esquerdo. Determine de quantos modos esta tripulação pode ser formada, se de cada lado deve haver quatro homens.

Observação: A ordem dos homens de cada lado distingue a tripulação.

26. (00–01) Um comandante de companhia convocou voluntários para a constituição de 11 patrulhas. Todas elas são formadas pelo mesmo número de homens. Cada homem participa de exatamente duas patrulhas. Cada duas patrulhas têm somente um homem em comum. Determine o número de voluntários e o de integrantes de uma patrulha.

27. (02–03) Sejam A e B dois subconjuntos de $\mathbb{N}$. Por definição, uma função $f: A \rightarrow B$ é crescente se $a_1 > a_2 \Rightarrow f(a_1) \geq f(a_2)$, para quaisquer a_1 e $a_2 \in A$.

a) Para $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$, quantas funções de A para B são crescentes?

b) Para $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, \dots, n\}$, quantas funções de A para B são crescentes, onde n é um número inteiro maior que zero?

28. (03–04) Ao final de um campeonato de futebol, somaram-se as pontuações das equipes, obtendo-se um total de 35 pontos. Cada equipe jogou com todos os outros adversários apenas uma vez. Determine quantos empates houve no campeonato, sabendo que cada vitória valia 3 pontos, cada empate valia 1 ponto e que derrotas não pontuavam.

29. (04–05) O sistema de segurança de uma casa utiliza um teclado numérico, conforme ilustrado na figura.

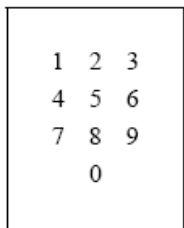
Um ladrão observa de longe e percebe que:

a senha utilizada possui 4 dígitos;

o primeiro e o último dígitos encontram-se numa mesma linha;

o segundo e o terceiro dígitos encontram-se na linha imediatamente superior.

Calcule o número de senhas que deverão ser experimentadas pelo ladrão para que com certeza ele consiga entrar na casa.



Teclado numérico

30. (06–07) Considere o conjunto formado por m bolas pretas e n bolas brancas. Determine o número de seqüências simétricas que podem ser formadas utilizando-se todas as $m + n$ bolas.

Observação: uma seqüência é dita simétrica quando ela possui a mesma ordem de cores ao ser percorrida da direita para a esquerda e da esquerda para a direita.

31. (07–08) De quantas maneiras n bolas idênticas podem ser distribuídas em três cestos de cores verde, amarelo e azul?

- A. $\binom{n+2}{2}$ B. $\binom{n}{3}$ C. $\frac{n!}{3!}$ D. $(n-3)!$ E. $3n$

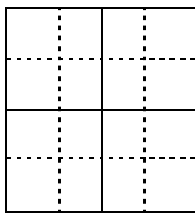
32. (07–08) Cinco equipes concorrem numa competição automobilística, em que cada equipe possui dois carros. Para a largada são formadas duas colunas de carros lado a lado, de forma que cada carro da coluna da direita tenha ao lado, na coluna da esquerda, um carro de outra equipe. Determine o número de formações possíveis para a largada.

33. (08–09) A figura abaixo é composta de 16 quadrados menores. De quantas formas é possível preencher estes quadrados com os números 1, 2, 3 e 4, de modo que um número não pode aparecer 2 vezes em:

uma mesma linha

uma mesma coluna

cada um dos quatro quadrados demarcados pelas linhas contínuas



Módulo 8 – RESOLUÇÃO das questões do módulo 7

1. Temos 102 e 81 representantes do partido A e B, respectivamente. Queremos escolher 99 e 79 elementos do partido A e B, respectivamente. Como a ordem de escolha desses elementos é desprezível, isso pode ser feito de $C_{102,99} \cdot C_{82,79} = 556308000$ modos diferentes.

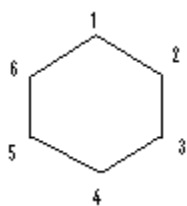
2. Temos 20 pontos distintos dos quais não existem 4 coplanares, e para formarmos um plano, precisamos escolher 3 desses 20 pontos em qualquer ordem. Logo, isso pode ser feito de $C_{20,3} = 1140$ maneiras diferentes.

3. Uma maneira fácil de resolver problemas envolvendo cadeiras, sendo que algumas estão vazias, é usar uma permutação com elementos repetidos, as cadeiras serão os “elementos repetidos”. Nesse problema, devemos ter 2 moças juntas uma da outra, 3 rapazes juntos uns dos outros e 2 cadeiras vazias. Assim, devemos permutar as 2 moças juntas, como se fossem uma só, ou seja, um bloco com as duas moças, um bloco com os 3 rapazes e as 2 cadeiras vazias, isso pode ser feito de $P_4^2 = 12$ modos diferentes. Como devemos permutar, ainda, dentro dos blocos, a solução será $P_4^2 \cdot P_2 \cdot P_3 = 144$ formas diferentes.

4. Devemos colocar um casal em cada degrau. Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem podemos colocar os 5 homens em 5 degraus de 5! Formas distintas e as 5 mulheres, analogamente, de 5! Formas distintas. Mas em cada degrau temos 2 possibilidades de colocarmos o casal (H e M ou M e H). Logo, temos $5! \cdot 5! \cdot 2^5 = 460800$ modos distintos.

5. Sabemos que o número 12345 nos dá $P_5 = 120$ possíveis permutações. São 120 linhas e 5 algarismos por linha, o que nos leva a concluir que cada algarismo aparece $120/5 = 24$ vezes em cada coluna. Logo, a soma de cada coluna será $1 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 6 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 6 = 90$. Agora devemos somar esses números sabendo que cada coluna tem soma igual a 90. Fazendo isso obtemos 999990 como resultado desejado.

6.



Considere 1, 2, 3, 4, 5 e 6 as pessoas dessa reunião. Se duas pessoas se conhecem, denotaremos por C os segmentos que as unem e, caso não se conheçam, denotaremos por D. Queremos mostrar que existe um triângulo com segmentos somente da forma C ou somente da forma D. Peguemos a pessoa 1. Necessariamente, pelo Princípio de Dirichlet, existem 3 segmentos da mesma forma, CCC ou DDD. Sem perda de generalidade, vamos supor que as pessoas 2, 3 e 4 são ligadas a pessoa 1 por um segmento C. Se a pessoa 2 conhece a 3 ou 4, ou se 3 e 4 se conhecem, o problema está acabado, pois teremos um triângulo da forma CCC (1, 2 e 3; 1, 2 e 4 ou 1, 3 e 4), caso contrário, eles se desconhecem mutuamente e, assim, teremos um triângulo (2, 3 e 4) com segmentos da forma DDD, o que finda a questão.

7. Temos dois casos para serem analisados:

i) Caso em que nos interessa apenas o número de pessoas, e não quais pessoas, que irão descer em cada uma das paradas.

ii) Caso em que as pessoas que descem também são levadas em consideração.

Assim, temos:

i) Como nos interessa apenas o total de pessoas que irão descer em cada parada e não quais as pessoas, devemos ter $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$, sendo $x_i \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, o número de pessoas que irá descer na parada i. Sabemos que a solução dessa equação linear com $x_i \geq 0$ é dada por $C_{10,7} = 120$. Portanto, temos 120 maneiras diferentes de todas aquelas 7 pessoas desembarcarem até a 4ª parada, inclusive.

ii) Como, agora, estamos considerando as pessoas, cada uma tem 4 possibilidades de escolha, pois pode escolher para desembarcar em uma das 4 paradas e, como são 7 pessoas, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o total de possibilidades é $4^7 = 16384$.

Logo, temos 16384 maneiras diferentes de todas aquelas 7 pessoas desembarcarem até a 4ª parada, inclusive, caso as pessoas que descem também são levadas em consideração.

8. Temos que os remadores A e B devem ficar do lado ímpar, assim, temos $4 \cdot 3 = 12$ posições para eles. O remador C deve ficar do lado par tendo 4 possíveis posições para sua escolha. Como os demais 5 remadores podem ser distribuídos de qualquer forma, ou seja, $P_5 = 5! = 120$, temos, pelo Princípio Fundamental da Contagem, $12 \cdot 4 \cdot 120 = 5760$ posições distintas.

Logo, temos 5760 para guarnecer o barco da forma solicitada pelo problema.

9. Inicialmente, iremos mostrar que cada aluno deve comparecer a exatamente 3 jantares. Se um dado aluno participa de 4 jantares, ele precisa de mais 8 alunos diferentes, separados em pares, para comparecer com ele aos jantares. Suponha, sem perda de generalidade, que o aluno A participe de 4 jantares. No 1º, ele vai com os alunos B e C, como existe a restrição de que um mesmo par de alunos não pode ser convidado para mais de um jantar, no 2º jantar, A deverá ir com os alunos D e E e, assim, sucessivamente. Logo, realmente, o professor precisaria de mais 8 alunos. Portanto, um aluno participa de, no máximo, 3 jantares (*).

Caso um aluno participe de 2, exatamente, 2 jantares sobrarão 19 convites (temos um total de 21 convites, pois são 7 jantares e 3 alunos por jantar) para serem distribuídos para os outros 6 alunos e, pelo Princípio de Dirichlet, pelo menos um desses 6 alunos deverá participar de 4 jantares, mas esse caso contraria a primeira asserção. Portanto, cada aluno deverá participar de, no mínimo, 3 jantares (**). Logo, de (*) e (**), segue que cada aluno deverá participar, exatamente, de 3 jantares.

Vamos supor os alunos A, B, C, D, E, F e G.

Primeiramente, vamos determinar os jantares aos quais A comparece (não vamos nos importar com a distribuição dos jantares nos dias da semana). Para isso, devemos escolher 2 alunos do conjunto $\{B, C, D, E, F, G\}$ e isso pode ser feito de $C_{6,2} = 15$ modos distintos.

Suponha, sem perda de generalidade, que A comparece aos jantares nos seguintes trios: $\{A, B, C\}$, $\{A, D, E\}$, $\{A, F, G\}$. B e C devem comparecer a mais dois jantares cada um, mas não podem ir juntos, assim como D e E. Logo, temos as seguintes duplas (grupos) determinadas:

- 1 – B, D
- 2 – B, E
- 3 – C, D
- 4 – C, E

Devemos relacionar F e G a essas duplas de modo a formar trios. Se F entra no grupo 1, ele poderá participar apenas do 4. Sendo assim, G participará dos grupos 2 e 3. Analogamente, se G participa do grupo 1, ele deverá participar do grupo 4 e, conseqüentemente, F participará dos grupos 2 e 3. Observamos então que, escolhendo que participará do grupo 1, o restante da distribuição estará bem determinada de uma única forma. E, para tal, temos duas possibilidades: F ou G participará do grupo 1. Portanto, o número de maneiras de separarmos os alunos em trios, com as restrições do enunciado, é $15 \cdot 2 = 30$. Porém, caso a ordem dos jantares durante os 7 dias da semana seja importante, teremos $7! \cdot 30$ possibilidades distintas.

10. Como pelo menos três pontos de luz devem ficar iluminados, devemos escolher 3, 4, 5 ou 6 pontos de luz de um total de 6 e, em cada um deles, temos duas cores a serem escolhidas: vermelha ou branca. Com isso o total de

possibilidades é dado por $\sum_{n=3}^6 C_{6,n} \cdot 2^n = C_{6,3} \cdot 2^3 + C_{6,4} \cdot 2^4 + C_{6,5} \cdot 2^5 + C_{6,6} \cdot 2^6 = 656$. Portanto, podemos obter 656 configurações distintas.

11. Dada a posição do primeiro carro (carro 1), o segundo carro (carro 2) tem duas opções, à direita ou à esquerda do carro 1, já estacionado. Assim, todos os carros, com exceção do primeiro, têm duas opções, à esquerda ou à direita da fila de carros já estacionados.

12. São 3 provas de Matemática e 7 provas quaisquer (Q1, Q2, ..., Q7). Inicialmente, iremos dispor as provas que não sofrem restrições.

__ Q1 __ Q2 __ Q3 __ Q4 __ Q5 __ Q6 __ Q7 __

Temos 8 lugares (__) para colocar as 3 provas de Matemática e isso pode ser feito de $C_{8,3} = 56$. Devemos, agora, permutar a ordem das 7 provas quaisquer e as 3 de Matemática. Assim, temos $56 \cdot 7! \cdot 3! = 1693440$ possibilidades de programar a seqüência dessas 10 provas.

13. Solução no módulo 3

14. Podemos pensar que temos 5 mesas com 2 cadeiras para colocar os 10 participantes, e isso pode ser feito de 10! formas diferentes, mas como a ordem das mesas não influencia (uma partida realizada na mesa 1 ou na mesa 5, por

$$\frac{10!}{5!}$$

exemplo, é indiferente para o problema), isso pode ser feito de $\frac{10!}{5!} = 30240$ modos distintos. Nesse caso, estamos levando em consideração que a partida A x B é diferente da B x A, pois numa partida de xadrez quem inicia é quem tem as peças brancas e, nesse caso, temos essa diferença. Caso essa distinção não seja levada em consideração, a

$$\frac{10!}{5! \cdot 2^5}$$

permutação entre os jogares numa partida não influenciará. Logo, teremos $\frac{10!}{5! \cdot 2^5} = 945$ formas distintas para realizar a primeira rodada.

15. a) São 6n pontos no total e cada um deles pode ser ligados a 5n pontos das demais faces para formar uma reta.

$$\frac{6n \cdot 5n}{2}$$

Como dois pontos quaisquer A e B ou B e A formam uma mesma reta, temos um total de $\frac{6n \cdot 5n}{2} = 15n^2$ retas.

b) Como temos 6n pontos, podemos formar $C_{6n, 3} = \frac{n(6n-1)(6n-2)}{6}$ triângulos, independentemente das faces em que eles se encontram. Mas não queremos triângulos numa mesma face. O total de triângulos numa mesma face com n

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

pontos é $C_{n, 3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$, mas como são seis faces, o número de triângulos numa mesma face é $n(n-1)(n-2)$. Logo, temos $n(6n-1)(6n-2) - n(n-1)(n-2) = 5n^2(7n-3)$ triângulos não contidos numa mesma face.

c) Devemos escolher 3 pontos em uma face (temos 6 faces para escolha) e um outro ponto dentre os 5n que se encontram em uma das outras 5 faces e isso pode ser feito de $6 \cdot C_{n, 3} \cdot 5n = 5n^2(n-1)(n-2)$ formas distintas.

d) Inicialmente, devemos calcular o total de possibilidades para selecionar as 4 faces de um total de 6, o que nos dá $C_{6, 4} = 15$ modos distintos. Em cada uma dessas 4 faces temos n pontos a escolher. Logo, temos $15 \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n = 15n^4$ tetraedros com todos os vértices em faces diferentes.

16. Inicialmente, temos dois caminhos e cada uma das 10 estradas secundárias nos dá 2 novas opções. Logo, o total de caminhos é $2 \cdot 2^{10} = 2048$.

17. Seja n o número de partidas disputadas. Como Flávio venceu a 2ª partida, podemos concluir que $n \geq 2$ (n natural). Em cada partida são distribuídos a + b + c pontos e como Tivemos um somatório de 39 pontos, segue que $n \cdot (a + b + c) = 39$. Como $n \geq 2$, temos que $n = 3$ e $a + b + c = 13$ ou $n = 13$ e $a + b + c = 3$. Mas, como $a > b > c$, com $a, b, c \in \mathbb{N}$, temos que $a + b + c \geq 6$. Logo, $n = 3$ e $a + b + c = 13$.

Como Marcos fez 20 pontos, temos $a \geq 7$, pois, caso contrário, ele teria feito, no máximo, 18 pontos.

Como Flávio venceu a 2ª partida, temos $a \leq 8$, pois, se não fosse, a vitória valeria, no mínimo, 9 pontos e, como toda posição gera uma pontuação positiva (a, b, c naturais), ele ficaria com mais de 10 pontos.

Acabamos de verificar que $a = 7$ ou $a = 8$. Vamos supor $a = 7$. Com a vitória valendo 7 pontos, Marcos só alcançaria seus 20 pontos com 2 vitórias e um segundo lugar com $b = 6$ pontos. Mas, nesse caso, teríamos $c = 0$. Logo, $a = 8$.

Flávio venceu a 2ª partida e levou 8 pontos. Assim, obrigatoriamente, nas duas outras partidas ele levou 1 ponto em cada ficando, assim, em 3º lugar em cada uma delas. Logo, segue $c = 1$ e $b = 4$. Com isso, segue que Marcos atingiu seus 20 pontos da forma $8 + 4 + 8$, isto é, vencendo a 1ª e a 3ª partida e ficando em 2º na 2ª partida disputada.

Finalmente, temos:

1ª partida: 1º: Marcos, 2º: Ralph e 3º Flávio

2ª partida: 1º: Flávio, 2º: Marcos e 3º Ralph

3ª partida: 1º: Marcos, 2º: Ralph e 3º Flávio

18. Sejam os conjuntos:

$$A_1 = \{1, 4, 7, \dots, 100\}$$

$$A_2 = \{2, 5, 8, \dots, 101\}$$

$$A_0 = \{3, 6, 9, \dots, 102\}$$

O conjunto $A_i, i \in \{0, 1, 2\}$, é composto pelos números que deixam resto i ao ser dividido por 3. é fácil ver que cada conjunto A_i possui 34 elementos. Devemos escolher 3 números de modo que a soma deles seja múltiplo de 3. Para isso, devemos escolher 3 números de A_0 , 3 de A_1 , 3 de A_2 e um de cada conjunto. Logo, podemos fazer isso de $C_{34, 3} + C_{34, 3} + C_{34, 3} + C_{34, 1} \cdot C_{34, 1} \cdot C_{34, 1} = 5984 + 5984 + 5984 + 39394 = 57256$ possibilidades.

19. Seja n o total de selos de Roberto. De acordo com os dados fornecidos pelo problema, temos:

$$\frac{2}{10}n + \frac{x}{7}n + 303 = n \Rightarrow n \cdot (28 - 5x) = 10605 \Rightarrow n \cdot (28 - 5x) = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 101$$

Com isso, segue que $28 - 5x$ é múltiplo de $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 101$ e como $28 - 5x > 0$ encontramos $x < 6$. Por inspeção, obtemos $x = 5$ e, conseqüentemente, $n = 3535$.

20. Queremos o total de números da forma abc , com $a, b, c \in \mathbb{N}$, $1 \leq a \leq 6$, $0 \leq b, c \leq 6$, a, b e c distintos. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos:

$\frac{6 \text{ pos.}}{\{1, 2, \dots, 6\}} \cdot \frac{6 \text{ pos.}}{\{0, 1, \dots, 6\}} \cdot \frac{5 \text{ pos.}}{\{0, 1, \dots, 6\}} = 180$ possibilidades, visto que para a casa das dezenas temos 7 possibilidades menos a que foi usada na casa das centenas e, na casa das unidades, teríamos 7 possibilidades, mas temos que excluir 2, pois foram usadas anteriormente. Logo, existem 180 números da forma solicitada pelo problema.

21. Inicialmente, devemos pensar que se a 1ª comissão tem x alunos, a 2ª tem $x - 1$ alunos distintos dos alunos da 1ª comissão, pois a cada duas comissões temos que elas possuem apenas 1 membro em comum, isto é, todos os outros são diferentes.. A 3ª comissão tem $x - 2$ alunos distintos dos anteriores e, assim, até a última comissão que não tem nenhum aluno que não pertenceu a alguma outra comissão. Sendo T o total de alunos, segue:

$$T = x + (x - 1) + (x - 2) + \dots + 1 + 0$$

Observe que T é a soma de uma P.A., de razão $r = -1$, de 15 termos, pois temos 15 comissões. Assim, temos:

$$T = \frac{(x + 0) \cdot 15}{2} = \frac{15 \cdot x}{2} \quad (i)$$

Mas, também, podemos escrever T como sendo igual a $x + (x - 1) + (x - 2) + \dots + 1$, o que nos dá T como a

$$\text{soma de uma P.A., só que agora, com 14 termos. Daí, segue: } T = \frac{(x + 1) \cdot 14}{2} = 7x + 7 \quad (ii)$$

De (i) e (ii), temos que $\frac{15 \cdot x}{2} = 7x + 7$, ou seja, $x = 14$. Como $T = \frac{15 \cdot x}{2}$ e $x = 14$, obtemos $T = 105$. Portanto, temos 105 alunos na escola (letra a) com 14 alunos em cada comissão (letra b).

22. Escolhendo 4 pontos quaisquer desse octógono podemos formar um único quadrilátero convexo que tem, evidentemente, um único ponto de interseção entre suas diagonais. Como temos $C_{8,4} = 70$ formas de escolhermos entre os 8 vértices do hexágono, temos que podemos formar 70 quadriláteros convexos distintos. Logo, como cada quadrilátero tem que as suas diagonais se interceptam em um único ponto, temos que existe 70 pontos de interseção de diagonais nesse octógono na forma proposta pelo enunciado.

23. Para sairmos do quadrado superior esquerdo e chegarmos ao quadrado inferior direito podemos usar os movimentos na horizontal (H), vertical (V) ou diagonal (D), conforme a figura dada. Observe que cada movimento na diagonal exclui um movimento na vertical e um na horizontal. Temos 4 casos a serem analisados:

i) movimentos: 3 na horizontal e 3 na vertical (HHHVVV)

Cada mudança de lugar nos gera caminhos diferentes. Assim, temos $P_6^{3,3} = 20$ formas diferentes de atingir o quadrado inferior direito.

ii) movimentos: 2 na horizontal, 2 na vertical e 1 na diagonal (HHVVD)

Analogamente, temos $P_5^{2,2} = 30$ formas distintas de atingir o local desejado.

iii) movimentos: 1 na horizontal, 1 na vertical e 2 na diagonal (HVDD)

Nesse caso, temos $P_4^2 = 12$ formas distintas de chegar ao quadrado inferior direito.

iv) movimentos: 3 na diagonal (DDD)

É claro que, nesse caso, temos apenas uma forma pra atingir o quadrado desejado.

Logo, de (i), (ii), (iii) e (iv), obtemos $20 + 30 + 12 + 1 = 63$ percursos distintos possíveis para alcançar o quadrado inferior direito.

24. Essa questão é idêntica aos itens a e b da questão 15 (IME/88-89).

25. Essa questão é idêntica a questão 8 (IME/79-80).

26. Essa questão é na mesma linha de raciocínio da questão 21 (IME/92-93). Logo, sua resolução é, praticamente, a mesma.

Inicialmente, devemos pensar que se a 1ª patrulha tem x homens voluntários, a 2ª tem $x - 1$ homens distintos dos homens da 1ª patrulha, pois a cada duas patrulhas temos que elas possuem apenas 1 membro em comum, isto é, todos os outros são diferentes. A 3ª patrulha tem $x - 2$ homens distintos dos anteriores e, assim, até a última patrulha que não tem nenhum homem que não pertenceu a alguma outra patrulha. Sendo T o total de voluntários, segue:

$$T = x + (x - 1) + (x - 2) + \dots + 1 + 0$$

Observe que T é a soma de uma P.A., de razão $r = -1$, de 11 termos, pois temos 11 patrulhas. Assim, temos:

$$T = \frac{(x + 0) \cdot 11}{2} = \frac{11 \cdot x}{2} \quad (i)$$

Mas, também, podemos escrever T como sendo igual a $x + (x - 1) + (x - 2) + \dots + 1$, o que nos dá T como a

$$\text{soma de uma P.A., só que agora, com 10 termos. Daí, segue: } T = \frac{(x + 1) \cdot 10}{2} = 5x + 5 \quad (ii)$$

De (i) e (ii), temos que $\frac{11 \cdot x}{2} = 5x + 5$, ou seja, $x = 10$. Como $T = \frac{11 \cdot x}{2}$ e $x = 10$, obtemos $T = 55$. Portanto, temos 55 homens com 10 voluntários em cada patrulha.

27.a) Temos dois casos a serem analisados:

i) $f(1) = f(2)$

Para $f(1) = f(2)$ temos, é claro, 4 possibilidades para termos uma função crescente, visto que há 4 possíveis conjunto-imagem com 1 elemento.

ii) $f(1) < f(2)$

Escolhendo 2 elementos distintos do $Cdf = B$, temos que é possível termos uma, e somente uma, função estritamente crescente (pois $f(1) \neq f(2)$) tendo como imagem 2 elementos escolhidos de $C_{4,2} = 6$ formas diferentes. Observe que, sem perda de generalidade, podemos escolher os elementos 3 e 4 de B e teríamos apenas uma função possível (de acordo com o que foi proposto nesse caso): $f = \{(1, 3), (2, 4)\}$.

Portanto, de (i) e (ii) segue que temos $4 + 6 = 10$ possíveis funções crescentes de A em B , sendo $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

b) Temos, agora, três casos a serem analisados:

i) $f(1) = f(2) = f(3)$

Para $f(1) = f(2) = f(3)$ temos, evidentemente, n possibilidades de formarmos uma função crescente, visto que há n possíveis conjunto-imagem com 1 elemento.

ii) $f(1) < f(2) < f(3)$

Escolhendo 3 elementos distintos n_1, n_2 e n_3 de B , temos que é possível construirmos uma, e somente uma, função com $f(1) < f(2) < f(3)$ para cada forma diferente de tomarmos n_1, n_2 e n_3 em B , mas como temos $C_{n,3}$ formas distintas de fazermos essa escolha, segue que temos $C_{n,3}$ funções possíveis para esse caso. Observe que, sem perda de generalidade, podemos escolher os elementos $\{n_1, n_2, n_3\}$ contidos em B com $n_1 < n_2 < n_3$ e, com isso, temos que a única função possível seria $a f = \{(1, n_1), (2, n_2), (3, n_3)\}$.

iii) $f(1) = f(2) = a$ e $f(3) = b$ ou $f(1) = a$ e $f(2) = f(3) = b$, para $a < b$ e a, b em B .

Escolhendo 2 elementos a e b quaisquer de B (isso pode ser feito de $C_{n,2}$ formas distintas), temos, exatamente, 2 funções crescentes tendo como imagem esses 2 elementos, pois para cada dois elementos a e b de B , $a < b$, temos dois casos: $f = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$ ou $f = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$. Portanto, temos $2 \cdot C_{n,2}$ funções crescentes com essas restrições.

Logo, de (i), (ii) e (iii) temos $n + C_{n,3} + 2 \cdot C_{n,2} = \frac{10!}{5! \cdot 2^5}$ funções crescente de A em B , sendo $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, \dots, n\}$.

Outra Solução:

Esse problema nada mais é que uma aplicação direta da combinação com elementos repetidos de n elementos tomados p a p :

$$CR_p^n = C_{n+p-1}^p$$

Na letra (a) teríamos $CR_2^4 = C_{4+2-1}^2 = C_5^2 = 10$ possíveis funções e, na letra (b),

$$CR_3^n = C_{n+3-1}^3 = C_{n+2}^3 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \text{ funções.}$$

28. Seja V e E , respectivamente, o número de vitória e empates que ocorreram no torneio. Sabemos que a pontuação total das equipes foi 35 pontos. Em um determinado jogo, a vitória acumula 3 pontos para o campeonato (o time que ganha leva 3 pontos e o que perde 0) e o empate acumula 2 pontos, pois cada time leva 1 ponto. Assim, segue que $3V +$

$$2E = 35, \text{ ou seja, } 2E = 35 - 3V \text{ o que implica } E = \frac{35 - 3V}{2} \quad (i).$$

De $E = \frac{35 - 3V}{2}$ vem que $\frac{35 - 3V}{2} \geq 0$, isto é, $V \leq 11$, $V \in \mathbb{N}$ e, também, podemos afirmar que V é ímpar, pois, caso contrário, teríamos $35 - 3V$ ímpar, absurdo, pois $2E$ é, evidentemente, par.

O total de partidas é dada por $C_{n, 2}$, sendo n o total de times do torneio. Como o total de partidas

$$\text{disputadas também é dada por } V + E, \text{ obtemos } V + E = C_{n, 2}, \text{ ou seja, } V + E = \frac{n(n+1)}{2} \quad (ii)$$

Substituindo (i) em (ii), vem $V + \frac{35 - 3V}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ o que nos leva a $35 - V = n(n+1)$ (*). Por inspeção a partir de V , pois vimos que V é um natural ímpar menor ou igual a 11, ou seja, $V \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, segue que $V = 5$, pois, caso contrário, o valor de n na equação (*) não seria um número natural. Com $V = 5$, obtemos $E = 15$ (em (i)). Logo, houve 10 empates no campeonato.

29. Temos que a senha utilizada é da forma $a_1a_2a_3a_4$, com $0 \leq a_i \leq 9$, $a_i \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Sabendo que a_1 e a_4 encontram-se numa mesma linha e que a_2 e a_3 na linha imediatamente superior. Com isso, temos 3 casos a serem analisados:

i) a_1, a_4 na 4ª linha e a_2, a_3 na 3ª linha:

$$\text{Nesse caso } a_1 = a_4 = 0 \text{ e } a_2, a_3 \in \{7, 8, 9\}. \text{ Logo, temos } \frac{1 \text{ pos.}}{\{0\}} \cdot \frac{3 \text{ pos.}}{\{7, 8, 9\}} \cdot \frac{3 \text{ pos.}}{\{7, 8, 9\}} \cdot \frac{1 \text{ pos.}}{\{0\}} = 9 \text{ possibilidades.}$$

ii) a_1, a_4 na 3ª linha e a_2, a_3 na 2ª linha:

$$\text{Temos que } a_1, a_4 \in \{7, 8, 9\} \text{ e } a_2, a_3 \in \{4, 5, 6\}, \text{ assim, temos } \frac{3 \text{ pos.}}{\{7, 8, 9\}} \cdot \frac{3 \text{ pos.}}{\{4, 5, 6\}} \cdot \frac{3 \text{ pos.}}{\{4, 5, 6\}} \cdot \frac{3 \text{ pos.}}{\{7, 8, 9\}} = 81 \text{ possibilidades.}$$

iii) a_1, a_4 na 2ª linha e a_2, a_3 na 1ª linha:

$$\text{Como } a_1, a_4 \in \{4, 5, 6\} \text{ e } a_2, a_3 \in \{1, 2, 3\}, \text{ temos } \frac{3 \text{ pos.}}{\{4, 5, 6\}} \cdot \frac{3 \text{ pos.}}{\{1, 2, 3\}} \cdot \frac{3 \text{ pos.}}{\{1, 2, 3\}} \cdot \frac{3 \text{ pos.}}{\{4, 5, 6\}} = 81 \text{ possibilidades.}$$

Portanto, de (i), (ii) e (iii) segue que temos $9 + 81 + 81 = 171$ senhas para serem experimentadas para que, certamente, ele consiga entrar em casa.

30. Temos 4 casos a serem analisados:

i) m ímpar e n par:

Com m ímpar e n par é claro que $m + n$ é ímpar e, conseqüentemente, temos uma bola central. Como m é ímpar, a sequência poderá ser simétrica apenas se a bola central for preta.

--- ... $\overset{P}{\text{---}}$... ---

Assim, restam $m - 1$ bolas pretas e n brancas e, evidentemente, devemos colocar uma metade de cada cor antes da bola

$$P \frac{\frac{m-1}{2}, \frac{n}{2}}{\frac{m-1}{2} + \frac{n}{2}}$$

central e a outra metade depois. Temos, com isso, formas de colocar essas bolas antes da bola preta (P) central e uma, e somente uma, para colocar as demais depois da bola central de modo que a sequência fique simétrica.

ii) m par e n ímpar:

$$P \frac{\frac{m}{2}, \frac{n-1}{2}}{\frac{m}{2} + \frac{n-1}{2}}$$

De forma análoga a (i), segue que temos possíveis sequências.

iii) m e n par:

Nesse caso, não temos uma bola central, visto que $m + n$ é par. Mas, com o mesmo raciocínio aplicado em (i),

$$P_{\frac{m+n}{2}, \frac{m+n}{2}}$$

temos $\frac{m+n}{2}$ seqüências simétricas possíveis.

iv) m e n ímpar:

Nesse último caso a ser analisado, temos que não é possível montar uma seqüência simétrica.

31. Seja x , y e z o número de bolas que podemos colocar nos cestos de cores verde, amarelo e azul, respectivamente. Como temos n bolas idênticas a serem distribuídas, segue que a solução desse problema nada mais é que o total de soluções naturais da equação $x + y + z = n$, com $x, y, z \in \mathbb{N}$, que sabemos que é dada por $C_{n+2,2}$.

$$\binom{n+2}{2}$$

Observação: Nessa questão, ocorreu um erro na representação do número binomial descrito por $C_{n+2,2} = \binom{n+2}{2}$. A representação da letra é esta errada.

32. Inicialmente, temos 10! Possibilidades de colocarmos esses 10 veículos na posição de largada. Dessas permutações vamos excluir aquelas com 2 carros de ao menos uma equipe lado a lado. Para isso, temos $C_{5,1}$ formas de escolhermos essa equipe que, por sua vez, poderá ser colocada em uma das 5 filas na largada (1^a , 2^a , 3^a , 4^a ou 5^a fila). Devemos, ainda, permutar os carros de uma mesma equipe ($2!$) e os demais 8 carros ($8!$). Assim, temos $C_{5,1} \cdot 5! \cdot 2! \cdot 8!$ formas distintas de fazermos isso. O problema que encontramos é que algumas dessas formas apresentam mais de uma equipe com seus carros emparelhados. Agora, calcularemos em quantos casos teremos ao menos 2 equipes com seus carros emparelhados. Primeiramente, temos $C_{5,2}$ formas de escolhermos essas 2 equipes e podemos colocá-las de 5.4 diferentes nas 5 filas da largada (a primeira equipe pode entrar em qualquer uma das 5 filas e a segunda em uma das outras 4 que restaram). Mas, ainda, devemos permutar os carros das duas equipes lado a lado ($2!2!$) e das demais 6 equipes ($6!$).

Seguindo essa linha de raciocínio aqui apresentada, pelo Princípio da Inclusão – Exclusão, temos:

$$10! - C_{5,1} \cdot 5! \cdot 2! \cdot 8! + C_{5,2} \cdot 5! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 6! - C_{5,3} \cdot 5! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 4! + C_{5,4} \cdot 5! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 4! - C_{5,5} \cdot 5! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! = 2088960$$

Portanto, temos 2088960 possibilidades de formar a largada da forma solicitada.

33. Utilizaremos uma notação Q1, Q2, Q3 e Q4 para referirmos a esses quadrados, que estão dispostos na ordem dos quadrantes:

| | | | |
|----|--|--|----|
| Q2 | | | Q1 |
| | | | |
| | | | |
| Q3 | | | Q4 |

Inicialmente, temos $4! = 24$ formas de colocarmos os números de 1 a 4 em um quadrado Q qualquer. Sem perda de generalidade, vamos inserir esses números no quadrado Q1 da seguinte forma (acabamos de ver que temos 24 formas de fazer isso. Iremos tomar 1 delas):

| | | | |
|---|---|---|---|
| E | F | 1 | 2 |
| G | H | 3 | 4 |
| | | A | B |
| | | C | D |

Caso tenhamos 2 e 4 numa mesma linha no quadrado Q3, obrigatoriamente, 2 e 4 ficariam numa mesma linha em Q4, diferente, é claro, da linha que eles estão em Q3 e, evidentemente, um deles ficaria na 2^a coluna de Q4, contrariando a hipótese de não termos 2 números iguais numa mesma coluna. Observe, por exemplo, que se 2 e 4 estão na linha 1 de Q3 então 2 e 4 deverão ficar nos lugares de A e B e, independentemente da ordem, um deles ficaria na coluna composta por 2, 4, B, D. Raciocínio análogo para 2 e 4 na linha 2.

Evidentemente, não podemos ter 1 e 3 na mesma linha no quadrado Q3, pelos mesmos argumentos aqui já descritos.

Caso tenhamos 1 e 2 numa mesma coluna no quadrado Q3, obrigatoriamente, 1 e 2 ficariam numa mesma coluna em Q2, diferente da coluna que eles se encontram em Q3 e, evidentemente, um deles ficaria na 1^a linha de Q2, contrariando, novamente, o que é solicitado pelo enunciado. Com a mesma linha de raciocínio já apresentada conseguimos, com uma certa facilidade, verificar isso.

Logo, concluímos que não podemos ter 2 e 4 numa mesma linha e nem 1 e 2 numa mesma coluna. Podemos escolher 4 lugares para fixar o número 1. Feito isso, podemos observar que teremos apenas 3 possíveis casos para o preenchimento de Q3 (colocaremos todos os possíveis casos para facilitar a visualização, mas observe que apenas 3 satisfazem os casos em que 2 e 4 não se encontram numa mesma linha e 1 e 2 não se encontram numa mesma coluna):

| | | |
|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| <div>2
3
1
4</div> | <div>2
4
1
3</div> | <div>3
2
1
4</div> |
| <div>3
4
1
2</div> | <div>4
2
1
3</div> | <div>4
3
1
2</div> |

Após preenchermos Q1, fixar o 1 em Q3 e colocar os demais números, o preenchimento dos demais quadrados ficam bem determinados com uma única possibilidade de preenchimento.

$$24 \cdot 4 \cdot 3 = 288$$

Possibilidades de preencher Q₁ Possibilidades de escolhermos um lugar em Q₃ para A Possibilidades para colocar 2, 3 e 4 em Q₃

Resumindo, temos, possibilidades de solucionar esse problema com as restrições propostas.