

FÍSICA

MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES

Introdução

Movimentos periódicos estão presentes na sua vida todos os dias. Você, ao ler este texto, pode não perceber, mas está presenciando vários movimentos periódicos. A luz que reflete neste papel para ir até seus olhos possui uma oscilação eletromagnética; seus olhos, ao percorrerem de uma ponta a outra essas linhas, estão realizando um movimento periódico; seu coração está bombeando sangue num movimento periódico.

Existem vários modelos de osciladores harmônicos (simples, amortecido e forçado). Trataremos aqui do movimento harmônico simples.

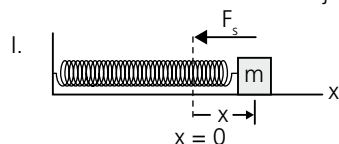
Um movimento é dito periódico quando a posição deste se repete em intervalos de tempo iguais. Este intervalo de tempo deve ser bem definido para cada tipo de movimento. Chamamos tal intervalo de período (T). O inverso dessa grandeza é denominado frequência (f). A frequência representa o número de vezes que o movimento se repete no tempo.

Para um MHS (movimento harmônico simples) o período (ou a frequência) informa algumas características sobre o tipo força que está causando o movimento. Vários exemplos clássicos de MHS são encontrados na natureza: pêndulos de relógio, pêndulos físicos, um objeto preso a uma mola, um objeto flutuando sobre a superfície calma de um lago também exerce um pequeno MHS, entre outros.

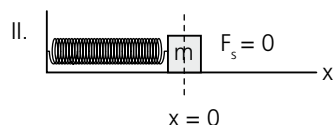
Movimento Massa-mola

Este é o primeiro movimento a ser estudado. Quando entendermos este movimento por completo, sairemos fazendo analogias diretas a outras situações físicas e assim resolveremos uma quantidade enorme de problemas.

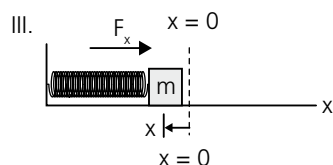
Modelo: Movimento de um objeto preso a uma mola.



- Inicialmente, o objeto é deslocado em um Δx , fazendo a mola ficar distendida.



- Surge uma força $\vec{F}_{(\Delta x)}$ no sentido oposto ao deslocamento.



- O mesmo ocorre da situação I.

A força é dita restauradora quando sempre aponta para a posição de equilíbrio.

Obs.: A posição de equilíbrio é a posição onde a resultante é nula.

Temos assim a seguinte equação para a segunda lei de Newton:

$$F_{el} = -kx = ma = m\ddot{x}$$

Usaremos a notação de ponto indicando uma derivada

temporal: $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ e $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$.

Desta forma, obtemos a seguinte equação:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Onde $\omega^2 = k/m$.

Equação do tipo: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Esta é uma equação diferencial de segunda ordem, linear e homogênea. Diferencial porque refere a uma derivada, de segunda ordem pelo fato de ser uma derivada segunda de x , linear porque todos os termos de x possuem expoente 1 e homogênea por não ter um termo independente de x .

Esta equação aparece várias vezes em física e descreve perfeitamente o oscilador harmônico simples. Outras situações da natureza, ao serem traduzidas em equações matemáticas, caem neste formato. A solução desta equação é simples. Veja:

Toda solução do tipo $x = A' \sin \omega t + B' \cos \omega t$ é solução da equação (onde A' e B' são constantes atribuídas à situação física). Perceba que existem duas constantes a serem determinadas, pois a equação é de segunda ordem. Se fosse uma equação de primeira ordem, teria uma constante a ser determinada? A resposta é sim!

Podemos, então, escrever de outra forma essa equação:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Onde φ_0 é outra constante, e assim temos A e φ_0 como as duas constantes a serem determinadas. Encontramos essas constantes com as condições de contorno do problema (faça o teste para verificar se este x realmente é solução).

Obs.: Nem sempre as equações da forma $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ descrevem MHS, porém as soluções desta equação sempre são desta forma.

Função horária do MHS

Dada a solução da equação característica do MHS, define-se:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

- **A:** Amplitude do movimento;
- ω : Frequência angular do movimento (pulsção);
- φ_0 : Fase inicial do movimento.

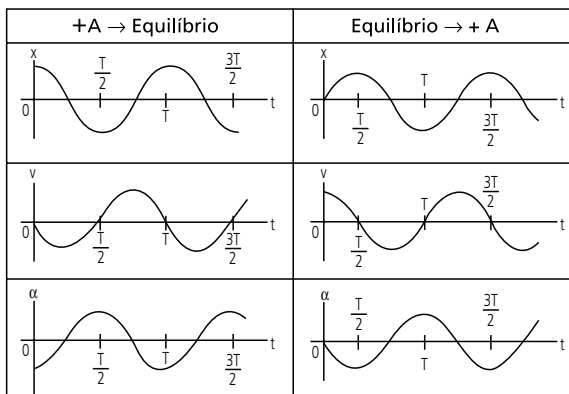
A amplitude nos diz a posição mais afastada da posição de equilíbrio que o bloco pode alcançar. A frequência angular é uma grandeza proporcional à frequência; logo, está relacionada com a rapidez do movimento. A posição inicial ($t = 0$) é relacionada com a fase inicial do movimento. Portanto, o movimento está completamente descrito em função destas grandezas.

A partir de $x(t)$, encontramos $v(t)$ e $a(t)$, simplesmente derivando:

$$v(t) = \dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

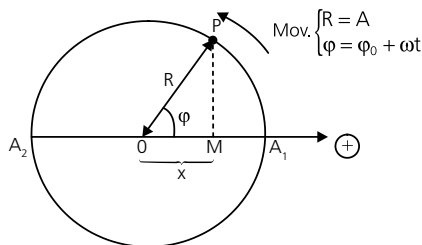
$$a(t) = \ddot{x} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Veja alguns exemplos de gráficos e perceba a defasagem entre a posição, velocidade e aceleração:



Analogia a MCU

Muitos autores tratam um MHS como uma projeção de um movimento circular uniforme para melhorar o aprendizado do aluno. Faremos isso aqui também:



Tome uma circunferência de raio A e uma partícula passeando por esta com velocidade angular constante ω , partindo de um φ_0 como ângulo inicial. Agora, pense em projetar a componente da posição $P(t)$ na direção x do plano cartesiano. Teremos então:

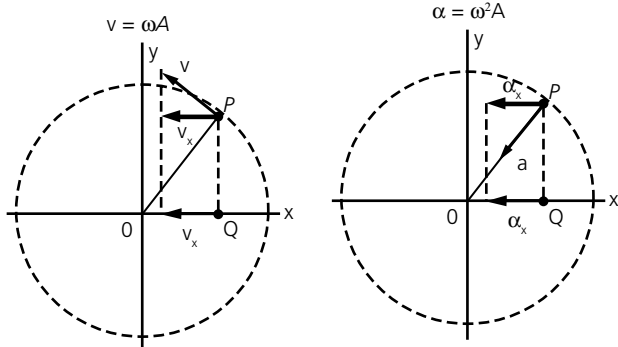
$$\varphi = \varphi_0 + \omega t$$

$$x = A \cos(\varphi)$$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Vejam só! Realmente, caímos em uma equação idêntica a de um MHS. Às vezes, visualizar este tipo de projeção ajuda a encontrar φ_0 .

Podemos determinar através deste método velocidade e aceleração. Fazemos as projeções da velocidade linear e da aceleração centrípeta sobre o eixo x e teremos:



$$v = -\omega A \sin(\varphi_0 + \omega t)$$

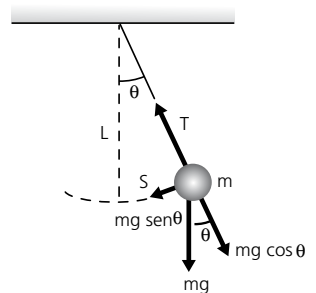
$$a = -\omega^2 A \cos(\varphi_0 + \omega t)$$

Observe atentamente os sinais da velocidade e da aceleração.

Aplicações

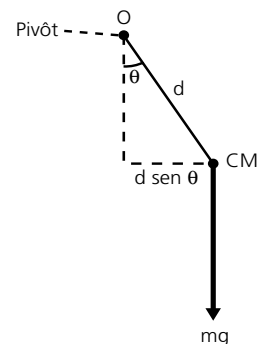
I. Pêndulo Simples

- $F_t = -mg \sin \theta = m \frac{d^2 s}{dt^2}$
- $\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta$
- $\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \theta$
- $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$

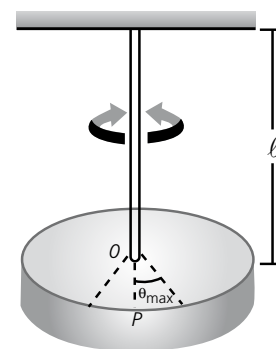


II. Pêndulo Físico

- $-mg d \sin \theta = I \frac{d^2 \theta}{dt^2}$
- $\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\left(\frac{mgd}{I}\right) \theta = -\omega^2 \theta$
- $\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$
- $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$



III. Pêndulo de Torsão



- $T = -k\theta \rightarrow T = -k\theta = \ell \frac{d^2 \theta}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{k}{\ell} \theta$
- $T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{k}}$

Energia no MHS

Já estudamos as funções horárias, já sabemos o tipo de força que gera MHS, então estudaremos o balanço energético.

Primeiramente, esta força é conservativa (não dissipa energia), o peso e normal não realizam trabalho. Podemos concluir que a energia é conservada. Temos então um sistema conservativo. Então, qual seria a energia total? Depende da massa do bloco? Depende da constante elástica?

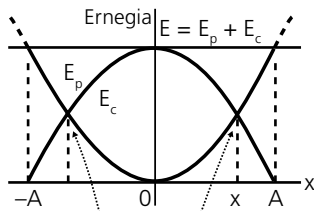
A energia total é dividida em cinética e potencial elástica.
Logo:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi);$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi);$$

$$E_t = \frac{1}{2}kA^2 [\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)] (E_t = E_c + E_p)$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2.$$

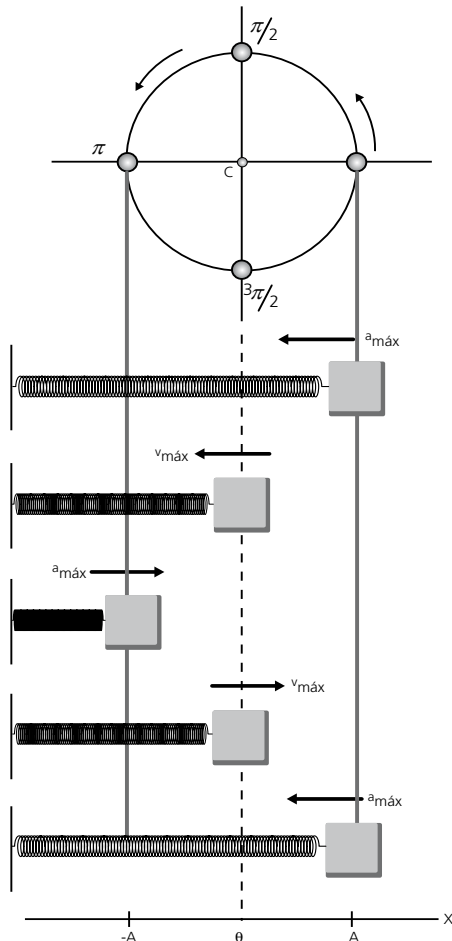


Pontos em que $\frac{1}{2} \cdot E_t = E_c = E_p$.

A energia total só depende da amplitude e da constante elástica. Note que as equações de energia cinética e potencial são função de seno e cosseno, respectivamente. Quando uma é máxima, a outra é mínima. Isso significa que as energias estão se alternando, porém mantendo a soma constante.

Atento agora para dois pontos importantes:

- A velocidade é máxima quando o seno é máximo, ou seja, na posição de equilíbrio ($x = 0$);
- A aceleração é máxima quando o cosseno é máximo, ou seja, nas posições de retorno ($x = \pm A$).



t	x	v	a	E_c	E_p
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
T/4	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T/2	-A	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
3T/4	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$

Uma arma muito efetiva para resolver alguns problemas é o estudo da equação de energia. Usaremos o fato de a energia total ser constante e partiremos da equação de energia para conseguir achar a equação característica do MHS. Veja:

A energia total de um sistema massa-mola em uma posição x é dada por:

$$E_t = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Kx^2$$

Derivando em relação ao tempo:

$$0 = m\ddot{x} + Kx$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

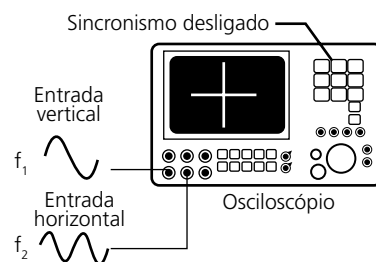
Ora, quer dizer que se não soubermos como escrever a força, mas conhecer a energia conseguimos chegar à equação característica? Sim, de fato. Você encontrará problemas que a solução ficará bem mais simples se atacar por este método.

Observe que isso se deve à forma do potencial dependente de x^2 . Este é um potencial parabólico; assim, para qualquer potencial na forma de parábola, teremos MHS.

Muitas curvas de potencial podem ser aproximadas para uma parábola nas proximidades de um equilíbrio estável. É por isso que constantemente nos deparamos com a seguinte frase (pequenas oscilações).

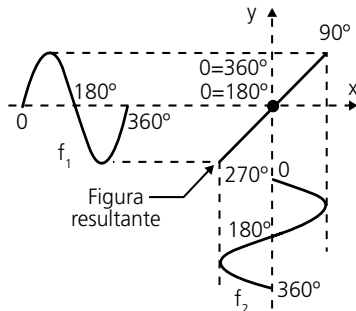
As figuras de Lissajous

Podemos pensar na composição das formas de onda senoidais como a sua mistura. É como se tivéssemos um misturador (*mixer*) capaz de juntar dois sinais de características diferentes, obtendo-se um efeito final que é a sua combinação. Desse modo, visualizamos o que ocorre de uma forma muito simples, usando para isso um osciloscópio imaginário inicialmente. Aplicamos um dos sinais na entrada vertical e o outro sinal na entrada horizontal, desligando o sincronismo interno, conforme ilustra a figura a seguir.



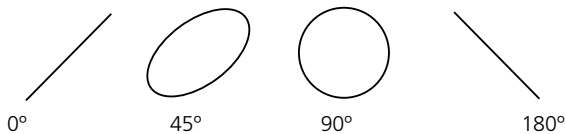
Aplicando sinais nas duas entradas como o sincronismo interno desligado.

Vamos partir, inicialmente, de dois sinais de mesma frequência e mesma fase, como mostrado na figura a seguir, em que analisaremos a formação da figura resultante, ponto a ponto.



Combinando sinais de mesma frequência e fase.

Tomamos em cada instante o ponto correspondente à intensidade de um sinal e também do outro, traçando linhas de projeção que se cruzarão determinando assim o local do espaço em que irá aparecer o ponto correspondente da imagem que será gerada. Numerando estes pontos, podemos traçar a imagem completa que no caso é uma linha reta inclinada de 45 graus. O que aconteceria, entretanto, se os sinais de mesma frequência estivessem defasados de 45 graus? Dependendo da defasagem, a figura gerada mudaria de forma, adquirindo os formatos vistos na figura a seguir.



Figuras para sinais de mesma frequência, porém com fases diferentes.

Mas os desenhos mais interessantes se obtêm quando as frequências dos sinais são diferentes, embora mantendo relações numéricas bem determinadas. Se os sinais tiverem frequências que mantenham entre si relações de números inteiros, como 2 para 1, 3 para 2, 5 para 4 etc. as figuras que serão formadas adquirem aspectos bastante interessantes.

Na figura seguinte temos um exemplo de figura formada quando os sinais possuem uma relação de frequência de 2 para 1, sendo que o sinal aplicado na varredura horizontal é aquele que tem a frequência mais alta.

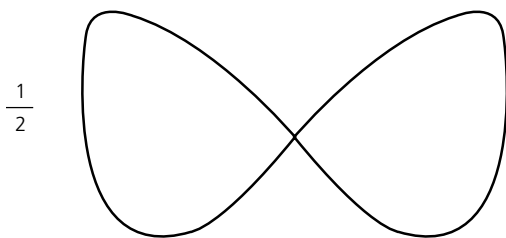


Figura para sinais com relação de frequência de 2 para 1.

O mais importante disso é que através da simples observação de uma figura formada por dois sinais, poderemos descobrir muito de um deles, se conhecermos o outro.



Exercícios de Fixação

01. Um corpo realiza MHS, cuja equação da elongação é:

$$x = 20 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}t\right) (\text{SI}).$$

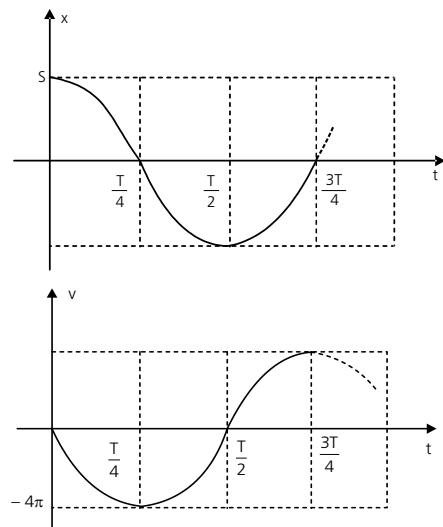
Determine:

- A) a amplitude, fase inicial, pulsação, período e frequência.
- B) a equação da velocidade e da aceleração.
- C) a elongação, velocidade e aceleração para $t = 3\text{ s}$.

02. Em um intervalo de tempo de 2 min uma partícula efetua 12 oscilações em torno de uma posição de equilíbrio, em MHS e sua aceleração máxima é igual a $0,02 \text{ m/s}^2$. No instante $t = 0$ a posição e a velocidade da partícula são, respectivamente, zero e $(10/\pi) \text{ cm/s}$. Determine:

- A) a amplitude, em cm.
- B) a fase inicial.
- C) a posição no instante $t = 2,5 \text{ s}$, em cm.
- D) a velocidade no instante $t = 5 \text{ s}$, em cm/s .
- E) a aceleração no instante $t = 0$, em cm/s^2 .

03. Um corpo realiza MHS de acordo com os diagramas apresentados abaixo, onde as grandezas estão no Sistema Internacional.



Determine:

- A) a amplitude do movimento, a pulsação e o período.
- B) escreva as equações da elongação, velocidade e aceleração.
- C) calcule o valor da aceleração quando $t = T/4$.

04. Um móvel realiza MHS, com amplitude de 12 cm, frequência de $1/8 \text{ Hz}$ e fase inicial nula.

Pergunta-se.

- A) Depois de quanto tempo, após ter passado pelo ponto de velocidade nula e elongação positiva, a elongação se torna pela primeira vez igual a $6\sqrt{2} \text{ cm}$?
- B) Qual o primeiro instante em que a posição $x = 5 \text{ cm}$?
- C) Qual a velocidade média entre os pontos de elongação $6\sqrt{2} \text{ cm}$?
- D) Qual a equação da velocidade?
- E) Qual o primeiro instante em que a velocidade é máxima?

05. Uma mola helicoidal, cuja constante elástica é k , e presa por uma das suas extremidades ao teto de uma sala. Na extremidade inferior, prende-se um corpo de massa m . Afastando-se o corpo da posição de equilíbrio e abandonando-o, qual é o período das oscilações que ele realiza?

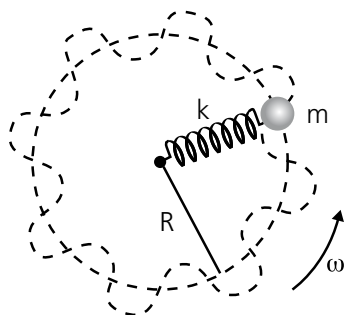
06. Certo pêndulo simples, que bate o segundo em Paris, onde $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, foi transportado para o equador terrestre, e então se verificou que o número de oscilações (de pequena amplitude) realizadas pelo referido pêndulo, por dia, ficou diminuído de 125 em relação ao número de oscilações (também de pequena amplitude) que ele realizava em Paris, por dia. Pode-se então afirmar que o módulo da aceleração da gravidade, num ponto qualquer do equador terrestre, tem valor:

- A) igual a $9,75 \text{ m/s}^2$.
- B) igual a $9,80 \text{ m/s}^2$.
- C) igual a $9,85 \text{ m/s}^2$.
- D) igual a $9,90 \text{ m/s}^2$.
- E) diferente de qualquer dos acima especificados.

07. (ITA-2008) Uma partícula P_1 , de dimensões desprezíveis, oscila em movimento harmônico simples ao longo de uma reta com período de $8/3 \text{ s}$ e amplitude a . Uma segunda partícula, P_2 , semelhante a P_1 , oscila de modo idêntico numa reta muito próxima e paralela à primeira, porém com atraso de $\pi/12 \text{ rad}$ em relação a P_1 . Qual a distância que separa P_1 de P_2 , $8/9 \text{ s}$ depois de P_2 passar por um ponto de máximo deslocamento?

- A) 1,00 a
- B) 0,29 a
- C) 1,21 a
- D) 0,21 a
- E) 1,71 a

08. (ITA-2010) Considere um oscilador harmônico simples, composto por uma mola de constante elástica k , tendo uma extremidade fixada e a outra acoplada à uma partícula de massa m . O oscilador gira num plano horizontal com velocidade angular constante ω em torno da extremidade fixa, mantendo-se apenas na direção radial, conforme mostra a figura. Considerando R_0 a posição de equilíbrio do oscilador para $\omega = 0$, pode-se afirmar que:

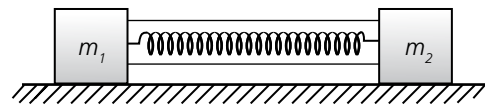


- A) o movimento é harmônico simples para qualquer que seja a velocidade angular ω .
- B) o ponto de equilíbrio é deslocado para $R < R_0$.
- C) a frequência do MHS cresce em relação ao caso de $\omega = 0$.
- D) o quadrado da frequência do MHS depende linearmente do quadrado da velocidade angular.
- E) se a partícula tiver carga, um campo magnético na direção do eixo de rotação só poderá aumentar a frequência do MHS.

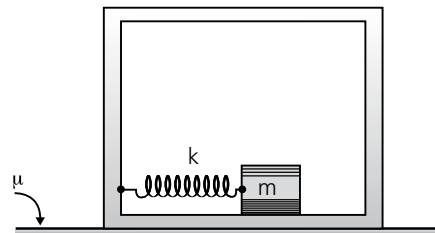
09. Dois pêndulos simples, situados próximos um do outro, efetuam oscilações de pequena amplitude. Sabendo-se que o comprimento do primeiro é o quádruplo do comprimento do segundo, e representando-se por T_1 e T_2 os períodos das oscilações do primeiro e segundo, respectivamente, pode-se afirmar que:

- () $T_1 = 4T_2$
- () $T_1 = 2T_2$
- () $T_1 = T_2$
- () $T_1 = 0,5T_2$
- () NDA

10. Dois blocos de massas m_1 e m_2 são ligados por uma mola de rigidez k . A mola está comprimida com a ajuda de dois fios, como mostra a figura. Os fios são queimados. Determinar o período de oscilações dos blocos.

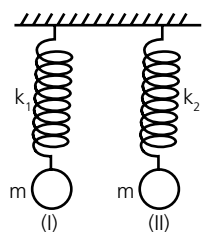


11. Uma caixa de massa M encontra-se na horizontal. O coeficiente de atrito entre a caixa e a mesa é μ . No interior da caixa, existe um corpo que pode se mover no fundo da mesma. O corpo é preso por uma mola de constante elástica K . Qual a amplitude máxima das oscilações do corpo para que a caixa permaneça em repouso?

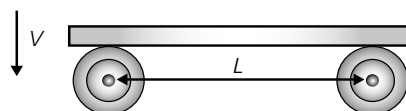


12. Duas molas ideais, sem massa e de constantes de elasticidade k_1 e k_2 , sendo $k_1 < k_2$ acham-se pendurados no teto de uma sala. Em suas extremidades livres penduram-se massas idênticas. Observa-se que, quando os sistemas oscilam verticalmente, as massas atingem a mesma velocidade máxima. Indicando por A_1 e A_2 as amplitudes dos movimentos e por E_1 e E_2 as energias mecânicas dos sistemas (I) e (II), respectivamente, podemos dizer que:

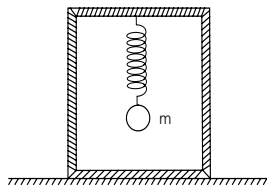
- A) $A_1 > A_2$ e $E_1 = E_2$
- B) $A_1 < A_2$ e $E_1 = E_2$
- C) $A_1 > A_2$ e $E_1 > E_2$
- D) $A_1 < A_2$ e $E_1 < E_2$
- E) $A_1 < A_2$ e $E_1 > E_2$



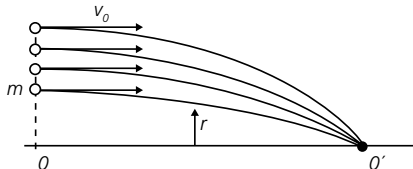
13. Uma barra de massa (m) repousa sobre dois cilindros que giram em velocidades contrárias. A distância entre os centros dos cilindros é (l) e o coeficiente de atrito entre este e a barra é μ . Achar a frequência das oscilações.



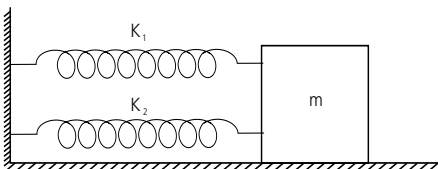
14. Uma caixa de massa $M = 10 \text{ kg}$ está sobre uma mesa horizontal. Da caixa, por meio de uma mola de constante $K = 600 \text{ N/m}$, está suspensa uma massa $m = 2 \text{ kg}$. Determine o valor da amplitude das oscilações da massa m para que a caixa M fique na iminência de saltar sobre a mesa.



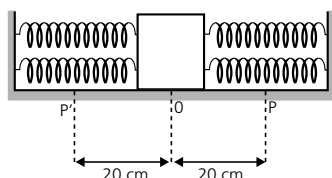
15. As forças que atuam nas partículas são perpendiculares ao eixo OO' e são funções da distância ao mesmo eixo OO' . As velocidades são v_0 e paralelas a OO' e as massas m . Podemos afirmar que:



- A) se as forças são do tipo $(F = -kr)$, podemos garantir que as partículas se encontrarão em O' .
 B) se as forças são do tipo $(F = -kr)$, não podemos garantir que as partículas se encontrarão em O' .
 C) se as forças são do tipo $(F = -kr)$, podemos garantir que as partículas passam por O' , mas não no mesmo instante.
 D) todas as partículas se encontram em OO' , independente do tipo de força.
 E) N.D.A.
16. Por um plano horizontal e liso, desliza uma haste fina de comprimento L . A velocidade da mesma é v_0 . Esta chega à uma região rugosa (coeficiente de atrito μ). Considere que ela para antes de entrar completamente na região rugosa. O tempo que a haste leva para parar totalmente é:
- A) $\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\mu g}{L}}$ B) $\frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{\mu g}{L}}$
 C) $V_0/\mu g$ D) $V_0/2\mu g$
 E) N.D.A.
17. Duas molas, cujas constantes são $K_1 = 100 \text{ N/m}$ e $K_2 = 50 \text{ N/m}$, estão unidas a uma parede vertical e a um corpo de massa m . Em um determinado instante a mola K_1 é alongada $0,3 \text{ m}$ e a mola K_2 é comprimida $0,3 \text{ m}$. Determine, em cm, a amplitude das oscilações do corpo. Despreze os atritos.



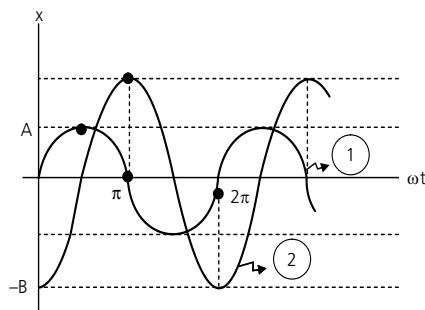
18. Na figura, o bloco tem massa 10 kg , o plano de apoio é horizontal e as quatro molas ideais são idênticas, apresentando cada uma constante elástica $2,5 \cdot 10^2 \text{ N/m}$. Com o bloco na posição de equilíbrio (ponto O), as quatro molas apresentam-se livres de qualquer deformação.



O bloco é então deslocado até o ponto P , de onde é abandonado, passando a oscilar em condições ideais entre P e P' . Determine, para o sistema oscilante:

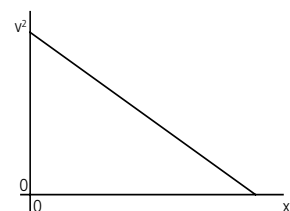
- A) a energia mecânica.
 B) o período de oscilação.

19. (ITA) Dois movimentos harmônicos simples estão caracterizados no gráfico abaixo. Podemos afirmar:



- A) $x_1 = A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ B) $x_1 = A \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$
 $x_2 = B \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ $x_2 = B \cos(\omega t + \pi)$
 C) $x_1 = A \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ D) $x_1 = A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$
 $x_2 = -B \cos(\omega t + \pi)$ $x_2 = -B \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$

20. (ITA/SP) Um observador em um referencial inercial estuda o movimento de uma partícula. A partir dos valores da velocidade v e da coordenada x , posição da partícula, obteve o gráfico ao lado.



$x(m)$	$v(m \cdot s^{-1})$
0	$\pm \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot A$
$\pm A$	0

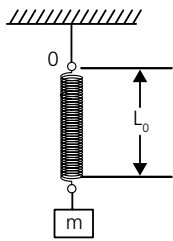
Dentre os valores obtidos acham-se tabelados anteriormente, onde k , m e A são constantes positivas.

- A) Trata-se do lançamento vertical de um foguete, na superfície da Terra, com velocidade inicial k/m , uma vez que à medida que a altura x aumenta, tem-se uma variação constante da velocidade.
 B) Para um observador fixo à partícula, o movimento é circular, com raio $A^2 \cdot \left(\frac{k}{m} + 1\right)$.
 C) Trata-se de um movimento harmônico simples com amplitude A , constante elástica k , massa da partícula m e aceleração $\left(-\frac{kx}{m}\right)$, para um observador na origem dos x .
 D) Para um outro observador inercial, o movimento é retilíneo com aceleração constante $\left(-\frac{kA}{m}\right)$.
 E) A partícula move-se sob a ação de uma força constante.



Exercícios Propostos

01. Uma mola de massa desprezível tem constante elástica K e comprimento L_0 quando não esticada. A mola é suspensa verticalmente por uma das extremidades e em outra extremidade é preso um corpo de massa m . Inicialmente o corpo é mantido em repouso em uma posição tal que a força exercida pela mola seja nula. Em seguida, a massa m é abandonada com velocidade inicial nula. Desprezando as forças dissipativas, o comprimento máximo (L) da mola será dado por:



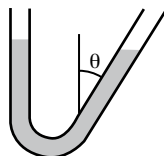
- A) $L = L_0 + \frac{mg}{K}$ B) $L = \frac{mg}{K}$
 C) $L = L_0 + \frac{2mg}{K}$ D) $L = \frac{2mg}{K}$
 E) $L = \frac{1}{2} \left(L_0 + \frac{mg}{K} \right)$

02. Uma partícula que descreve movimento harmônico simples tem a seguinte equação horária da posição:

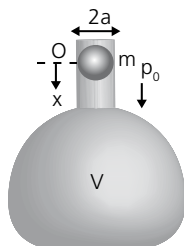
$$x = 100 \cos \left(4t + \frac{3\pi}{4} \right), \text{ onde } x \text{ é dado em cm e em s. Pede-se:}$$

- A) a elongação máxima.
 B) a posição da partícula no instante $t = 0$.
 C) a fase inicial do movimento.
 D) o período.
 E) a frequência.

03. Determine o período de oscilação de um líquido de massa m e densidade ρ colocado dentro de um tubo de área transversal S (figura abaixo). O ângulo de inclinação do lado direito é θ .



04. No método de Rüchardt, para medir $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ do ar, usa-se um grande frasco com um gargalo cilíndrico e estreito de raio a , aberto para a atmosfera (p_0 = pressão atmosférica), no qual se ajusta uma bolinha metálica de raio a e massa m . Na posição de equilíbrio O da bolinha, o volume de ar abaixo dela no frasco é V (figura). Calcule a força restauradora sobre a bolinha quando ela é empurrada de uma distância x para baixo, a partir do equilíbrio, o movimento sendo suficientemente rápido para que o processo seja adiabático. Mostre que a bolinha executa um MHS e calcule o período em função de a , m , v , p_0 e γ .

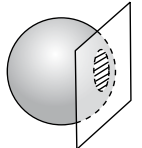


05. Um corpo de massa m_1 , sobre uma superfície horizontal sem atrito, oscila com a amplitude A , preso a certa mola de constante força k . Quando a mola está com a elongação máxima e o corpo momentaneamente em repouso, um segundo corpo de massa m_2 é superposto a ele.

- A) Qual o menor valor do coeficiente de atrito estático μ_s entre os dois corpos, para que o segundo não escorregue sobre o primeiro?
 B) Explique como a energia total E , a amplitude A , a frequência angular e o período T do sistema se modificam pela colocação de m_2 sobre m_1 , admitindo que o coeficiente de atrito seja suficiente para não haver escorregamento.

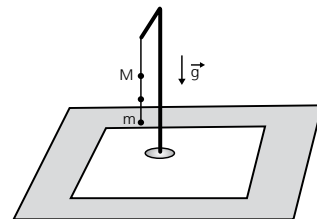
06. Quanto tempo dura o choque entre uma bola de futebol de raio r e massa m , em uma parede?

Dados: Pressão interna = p
 Pressão atmosférica = p_0

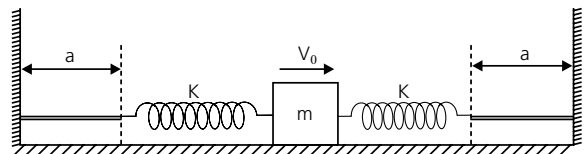


07. Um pêndulo duplo oscila com frequência angular ω . O comprimento do fio que vai do ponto fixo até a massa M , e o que vai de M até m valem L . Calcule o período (aproximado) das oscilações.

Dados: $M = 7m$.



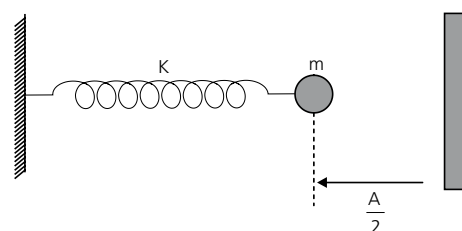
08. Um corpo de massa m pode deslizar ao longo de um eixo horizontal $00'$ entre duas paredes verticais. Em ambos lados do corpo temos molas ideais de igual constante elástica. O corpo está situado simetricamente entre as paredes e os extremos livres das molas estão a uma distância a das paredes. Comunica-se ao corpo a velocidade V_0 e o mesmo começa a oscilar entre as paredes. Determine o período das oscilações. Despreze os atritos.



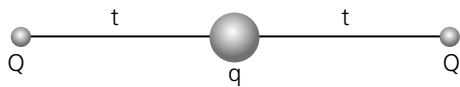
09. Uma bolinha de massa m , ligada a uma mola cuja constante é K , realiza oscilações harmônicas de amplitude A . A uma distância $\frac{A}{2}$ da posição de equilíbrio se coloca uma prancha de aço de

grande massa, na qual bate a bolinha. O choque da bolinha com a prancha é perfeitamente elástico. Encontre o período das oscilações. Despreze a gravidade.

Dado: $T = \frac{4\pi}{3} \sqrt{\frac{m}{K}}$

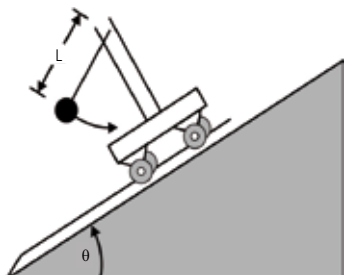


10. Uma conta carregada com carga q pode mover-se por um fio tensionado, de comprimento $2l$, o qual possui nas extremidades cargas fixas Q . Encontre o incremento de energia potencial quando a conta é deslocada x da origem.

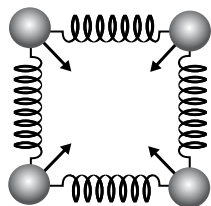


11. Calcule o período de oscilações do problema anterior.

12. Um pêndulo simples, de comprimento L , está solidário com um carrinho que rola sem atrito por um plano inclinado de θ (figura abaixo). Calcule o período de oscilação do pêndulo no carrinho rolando no plano ao lado.



13. Quatro massas iguais m estão unidas por molas de constante elástica K (ver figura). Simultaneamente, as massas adquirem a mesma velocidade voltada para o centro.



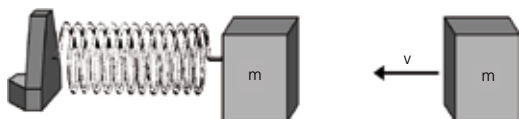
Em quanto tempo as molas estarão:

- A) com o comprimento máximo?
B) com o comprimento mínimo?

14. A figura abaixo mostra um sistema oscilante massa-mola sobre uma superfície horizontal sem atrito e um outro corpo que se dirige contra o corpo oscilante, com a velocidade v . O movimento do corpo oscilante é dado por:

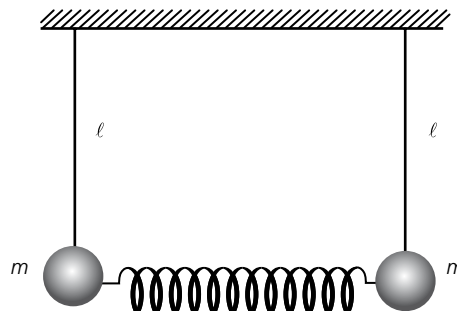
$$x(t) = (0,1m) \cos(40\pi t)$$

em que x é o deslocamento do corpo em relação à posição de equilíbrio. Os dois corpos colidem no instante em que o corpo vibrante passa pela posição de equilíbrio avançando para a direita. A colisão é elástica.

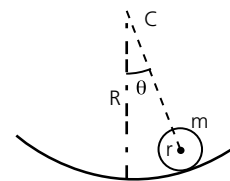


- A) Qual a velocidade v do segundo corpo para que o sistema massa-mola fique em repouso depois da colisão elástica?
B) Qual a velocidade do segundo corpo depois da colisão elástica?

15. Dois pêndulos simples, de comprimento (l) cada um, estão ligados por uma mola de peso desprezível, como mostra a figura abaixo. O coeficiente de elasticidade da mola é igual a k . Em equilíbrio, os pêndulos estão na posição vertical e a mola não se deforma. Determine a frequência das pequenas oscilações, de dois pêndulos unidos, nos casos: quando os pêndulos forem inclinados, em um mesmo plano, em ângulos iguais, para um mesmo lado (oscilações em fase) e para lados diferentes (oscilações em fase oposta).

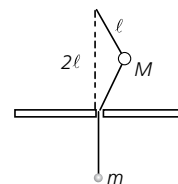


16. A) Encontre a dependência da energia potencial de uma esfera de raio r e massa m em relação a um pequeno x a partir da posição de equilíbrio. A pequena esfera está deslizando ao longo de uma superfície curva de raio R .

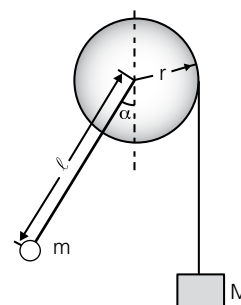


- B) Agora, admita que na mesma situação exista atrito e a bolinha não desliza. Calcule a frequência angular ω . Para este item, faça as seguintes considerações: $R \gg r$ e $\phi \ll 1$.

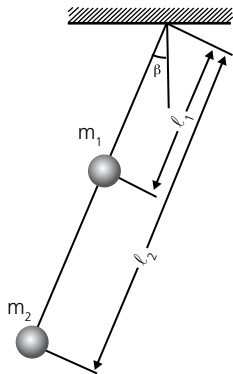
17. Um pêndulo de massa M e comprimento ℓ oscila em torno da vertical, efetuando pequenas oscilações. Pendurado do pêndulo está uma pequena massa que oscila na vertical (acho que a figura explica a situação...). Como é que a massa m afeta o período do pêndulo?



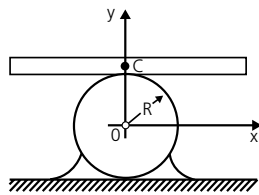
18. A uma polia, de raio r e massa desprezível, está fixa uma barra de comprimento ℓ e massa também desprezível com uma bola de massa m na extremidade. Existe um fio enrolado na polia que possui uma massa M na extremidade livre (ver figura). Determine o período das oscilações.



19. Encontre o período de oscilações do pêndulo abaixo. As massas são m_1 e m_2 e a barra possui peso desprezível.



20. Uma tábua de largura h repousa sobre um cilindro de raio R . Considerando que não existe deslizamento, em que condições a barra oscilará sobre a posição de equilíbrio?



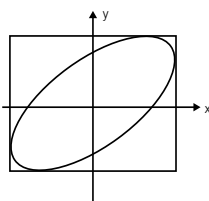
21. A interferência de dois MHS ortogonais de mesma frequência resulta:

- A) uma reta, se a diferença de fase for $n\pi$, onde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$
 B) um círculo, se as amplitudes forem iguais e a diferença de fase for $\frac{m\pi}{2}$ onde $m = 1, 3, 5, \dots$
 C) uma elipse, se a diferença de fase for arbitrária (diferente de $\frac{k\pi}{2}$ onde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$) ou $\frac{n\pi}{2}$ (exclusivamente no caso de as amplitudes dos MHS serem diferentes).
 D) Todas as alternativas acima são corretas.

22. Na interferência de dois MHS ortogonais, de mesma frequência e amplitude, pode-se afirmar que:

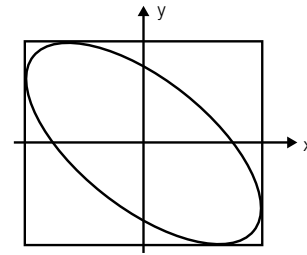
- A) a figura de Lissajous não poderá ser uma elipse.
 B) a figura de Lissajous só poderá ser um círculo.
 C) a figura de Lissajous, só poderá ser uma reta.
 D) a figura de Lissajous poderá ser uma elipse, com eixos não coincidentes com os eixos coordenados, desde que a diferença de fase dos MHS seja arbitrária (diferente de $\frac{k\pi}{2}$ onde $k = 0, 1, 2, 3, \dots$).

23. (ITA) Na figura ao lado, que representa a combinação de dois MHS em eixos perpendiculares $x = A \sin \omega t$ e $y = B \sin (\omega t + \alpha)$, sendo α um número positivo, qual das expressões abaixo poderá representá-lo?



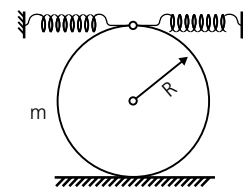
- A) $\alpha = 0$
 B) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
 C) $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$
 D) $0 < \alpha < \pi$
 E) $0 < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

24. Na figura abaixo, que representa a combinação de dois MHS em eixos perpendiculares $x = A \sin \omega t$ e $y = B \sin (\omega t + \alpha)$, sendo α um número positivo, qual das expressões abaixo poderá representá-lo?

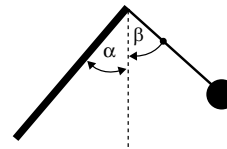


- A) $\alpha = 0$
 B) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
 C) $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$
 D) $0 < \alpha < \pi$
 E) $0 < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

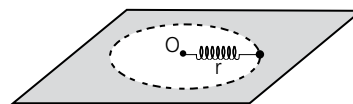
25. Calcule o período das oscilações de um cilindro preso a duas molas de constante K , como na figura abaixo.



26. Ao ponto O de uma parede que forma um pequeno ângulo α com a vertical prende-se através de um fio de comprimento L uma bola. Logo inclina-se o fio com a bola de um pequeno ângulo β ($\beta > \alpha$) e solta-se. Considerando absolutamente elástico o choque da bola contra a parede, encontre o período das oscilações deste pêndulo.



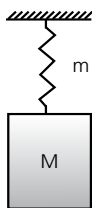
27. Um corpo de massa m é conectado por uma mola num ponto O sobre uma superfície horizontal, sobre a qual o corpo pode se mover sem atritos.



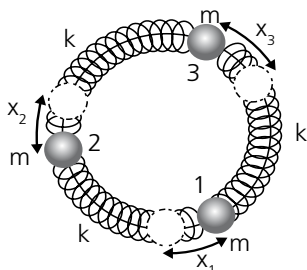
O comprimento relaxado da mola é l_0 e sua constante elástica é k . Num dado instante, a distância do corpo até o ponto O é r . Suponha que se faça o corpo girar com frequência angular ω e no instante inicial ele não possui nenhuma componente radial de velocidade.

- A) Calcule o raio de equilíbrio para o qual o corpo realiza movimento circular em torno de O . Expresse r_0 em termos de m, k, l_0 e ω .
 B) Calcule o período de pequenas oscilações radiais do corpo em relação ao raio de equilíbrio r_0 . Imagine que inicialmente o corpo se encontrava em movimento circular em r_0 e com velocidade angular ω quando uma pequena perturbação radial fez com que ela começasse a oscilar. Dê o resultado em função de k, m e r_0 .

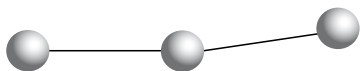
28. Um corpo de massa M está preso a uma mola de massa m e constante k . Calcule o período de oscilações do movimento.



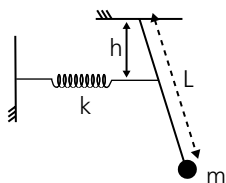
29. Dado o sistema abaixo:



- A) Escreva a equação da força resultante para cada partícula.
B) Sabendo que as soluções são do tipo: $x_j = A_j e^{i\omega t}$, calcule as frequências naturais do movimento.
30. Três pequenas moedas idênticas, de massa m cada uma estão conectadas por duas cordas leves e não condutoras cada uma, de comprimento d . Cada moeda tem uma carga desconhecida Q . As moedas são colocadas em uma superfície horizontal, isolante e sem atrito, as duas cordas fazendo um ângulo próximo a 180° conforme mostra a figura. Após soltar as moedas, observa-se que elas vibram com um período T . Determine a carga Q de cada moeda.



31. Um pêndulo é formado por uma haste rígida (de massa desprezível e comprimento l) e uma massa m presa em sua extremidade inferior. Ele pode oscilar livremente em torno do seu ponto de suspensão e a gravidade local é g . Prende-se uma mola de constante elástica k a uma distância h abaixo do ponto de suspensão.

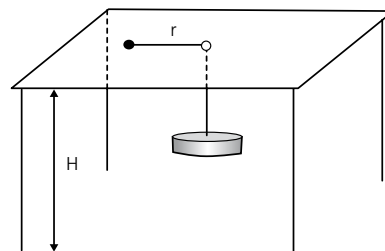


Suponha que a mola mantenha-se sempre horizontal (isto é, podemos imaginar que a mola seja muito longa) e que ela se encontre relaxada quando o pêndulo estiver vertical.

- A) Calcule o período de pequenas oscilações do pêndulo, em torno de sua posição de equilíbrio. Assuma que o movimento esteja restrito ao plano da mola-haste.
B) E se a haste também tivesse uma massa m' homogeneamente distribuída, como isso entraria na expressão para o período?

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L^2 \left(m + \frac{m'}{3}\right)}{kh^2 + gL \left(m + \frac{m'}{2}\right)}}$$

Uma mesa, com sua superfície a uma altura H do chão, tem um orifício em seu centro. Uma partícula de massa m é presa a um corpo suspenso de massa M por uma corda de comprimento $l > H$, que passa pelo orifício.



A partícula pode se mover sem atrito pela superfície da mesa (e também não há atritos entre a corda e o orifício). É dada à partícula uma velocidade angular em torno do orifício (sem nenhuma componente radial de velocidade).

- A) Sendo r a distância da partícula até o orifício, calcule o raio de equilíbrio $r = r_0$ para o qual o corpo de massa M fica parado. Expresse r_0 em termos M , m , e g , a gravidade local.
B) Calcule a frequência de pequenas oscilações radiais da partícula em torno de r_0 . Imagine que inicialmente a partícula se encontrava em movimento circular em r_0 e com velocidade angular ω_0 quando uma pequena perturbação radial fez com que ela comesse a oscilar.
C) Considere que a partícula esteja inicialmente a uma distância r do orifício, com uma velocidade angular ω . O sistema é, então, solto de modo que o corpo M desça naturalmente até o chão, isto é, suponha que $l - H > r_0$. Qual será a nova velocidade angular ω' da partícula nessa nova situação?

Expresse o resultado em função dos parâmetros básicos do problema.

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{3m}{M+m}}$$



Fique de Olho

Os leitores que tiverem dificuldades em entender a "matemática" de nossas explicações ou que desejarem ir além calculando o que deverá resultar da combinação de senóides de determinadas frequências podem procurar nos livros de Física informações no capítulo que trata de "Composição de MHS ou Movimentos Harmônicos Simples".

Usando as Figuras de Lissajous para Medidas de Sinais

Existem duas formas de trabalhar com as figuras de Lissajous para se medir amplitude, frequência e fase de sinais senoidais. Veja que é preciso ter os recursos para se visualizar essas figuras. O mais comum é o osciloscópio, mas elas podem ser produzidas em computadores e mesmo por sistemas mecânicos.

A) Sinal único

Com a ajuda de um gerador de sinais senoidais ligado a uma das entradas, podemos descobrir as características de qualquer sinal senoidal que seja aplicado na outra entrada. Este fato torna as figuras de Lissajous um importante recurso para o diagnóstico de problemas em equipamentos, ou ainda para a medida de frequências sem que para isso seja necessário usar um frequencímetro.

Para medir a frequência de um sinal empregando as figuras de Lissajous o que precisamos fazer inicialmente é aplicar o sinal desconhecido numa das entradas do osciloscópio, por exemplo a vertical. Na horizontal, vamos ligar um gerador de sinais senoidais e ajustá-lo até que tenhamos uma figura estável em que possamos contar os lóbulos ou protuberâncias formadas. Vamos supor que, conforme mostra a figura seguinte, a figura formada tenha 3 lóbulos na parte horizontal e dois na vertical.

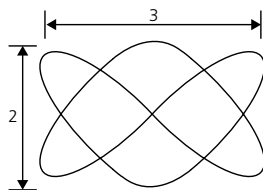
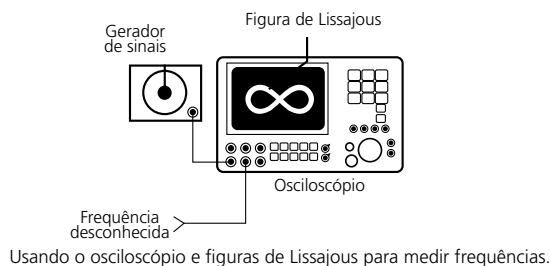


figura gerada com 3 lóbulos horizontais e 2 verticais.

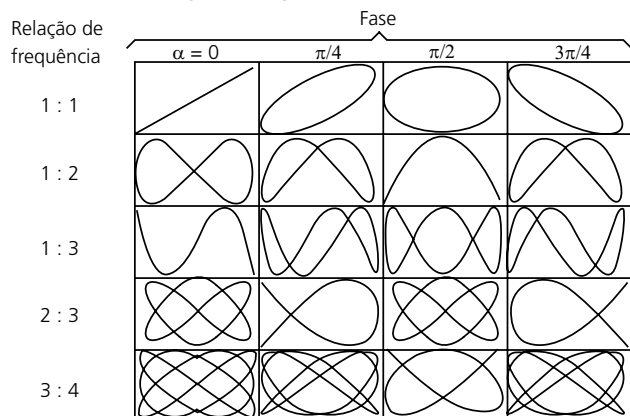
Sabemos que a relação de frequências para os sinais aplicados é de 3 para 2. Dessa forma, se a frequência do sinal aplicado na varredura horizontal que serve como referência for de 1500 Hz, por exemplo, a frequência do sinal desconhecido será de 1000 Hz. Veja, então, que o maior cuidado que o operador que está realizando as medidas deve ter é ir ajustando vagarosamente seu gerador de sinais para que possa encontrar uma posição em que a figura tenha poucos lóbulos tanto na horizontal como na vertical, e assim fique fácil contá-los. Uma relação de frequências de 235 para 234, por exemplo, não apenas tornaria praticamente impossível a contagem dos lóbulos mas também não poderia ser obtida com a devida estabilidade. Na figura que segue temos diversas figuras que são formadas para relações de frequências mais comuns.



No caso específico dos sinais de mesma frequência quando obtemos retas, elipses ou círculos nas figuras, podemos medir também a defasagem do sinal, o que é outro recurso importante deste tipo de análise.

B) Dois sinais

Neste caso, podemos usar as figuras de Lissajous para medir a fase entre eles. Basta aplicar os sinais nas entradas vertical e horizontal do osciloscópio (que terá o sincronismo interno desligado) e analisar a figura formada, que poderá ser qualquer uma das que são mostradas na figura a seguir.



Figuras para diversas relações comuns de frequências.

No computador:

Os leitores com habilidades de programação poderão escrever programas simples que gerem as figuras no monitor de seu computador. Estes programas podem ser interessantes tanto para o leitor aprender mais como para aulas práticas, mostrando como serão as figuras resultantes da aplicação de frequências determinadas.

Conclusão

Temos salientado em nossos artigos a importância do osciloscópio como instrumento de bancada. Não só para visualizar as formas de onda e medir amplitudes, ele também tem outras utilidades como as que descrevemos neste artigo. O leitor que possui um osciloscópio deve familiarizar-se com as figuras de Lissajous e seu uso e, mais do que isso, deve praticar com seu uso. Na indústria, onde problemas de defasagens de sinais da rede de energia são importantes para se determinar o fator de potência, por exemplo, o uso das Figuras de Lissajous se mostra em especial de grande utilidade, eliminando assim a necessidade de outros equipamentos.

Texto extraído de:
<http://newtonbraga.com.br>
 Autor: Newton C. Braga.

Apêndice

Grandezas Fundamentais

- A) **Amplitude:** magnitude máxima de deslocamento da posição de equilíbrio. $(SI - m) \sim A$.
- B) **Período:** Tempo necessário para a repetição do momento cinemático $(\vec{x}; \vec{v}; \vec{a})$, ou a repetição do ciclo. $(SI - S) \sim T$.
- C) **Frequência:** Número de ciclos por unidade de tempo.

$$\left(SI - Hz = \frac{1 \text{ ciclo}}{s} = 1 \cdot s^{-1} \right) - f$$
- D) **Pulsção:** $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$

Derivadas

Sejam **u** e **v** funções deriváveis de **x** e **n** constante.

1. $y = u^n \Rightarrow y' = nu^{n-1}u'$
2. $y = uv \Rightarrow y' = u'v + v'u$
3. $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
4. $y = a^u \Rightarrow y' = a^u (\ln a)u'$, $(a > 0, a \neq 1)$
5. $y = e^u \Rightarrow y' = e^u u'$
6. $y = \log_a u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u} \log_a e$
7. $y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{1}{u} u'$
8. $y = u^v \Rightarrow y' = v u^{v-1} u' + u^v (\ln u) v'$
9. $y = \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u$
10. $y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \sin u$

11. $y = \operatorname{tg} u \Rightarrow y' = u' \sec^2 u$
12. $y = \operatorname{cotg} u \Rightarrow y' = -u' \operatorname{cosec}^2 u$
13. $y = \sec u \Rightarrow y' = u' \sec u \operatorname{tg} u$
14. $y = \operatorname{cosec} u \Rightarrow y' = -u' \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u$
15. $y = \operatorname{arc} \operatorname{sen} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
16. $y = \operatorname{arc} \cos u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
17. $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$
18. $y = \operatorname{arc} \operatorname{cotg} u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{1+u^2}$
19. $y = \operatorname{arc} \sec u, |u| \geq 1 \Rightarrow y' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}, |u| > 1$
20. $y = \operatorname{arc} \operatorname{cosec} u, |u| \geq 1 \Rightarrow y' = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}, |u| > 1$

Identidades Trigonométricas

1. $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1$
2. $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$
3. $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$
4. $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$
5. $\operatorname{cos}^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$
6. $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$
7. $2 \operatorname{sen} x \cos y = \operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(x+y)$
8. $2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$
9. $2 \cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$
10. $1 \pm \operatorname{sen} x = 1 \pm \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$



Anotações

FARIAS BRITO

O 1º DO BRASIL

NO ITA E NO IME*

63 APROVAÇÕES

COMPARATIVO ENTRE AS ESCOLAS CEARENSES**

ESCOLA	ITA	IME	TOTAL
FARIAS BRITO	20	43	63
ESCOLA B	09	27	36
ESCOLA C	10	23	33
ESCOLA D	01	09	10
ESCOLA E	03	04	07
ESCOLA F	01	04	05
ESCOLA G	00	04	04

*Comparativo entre todas as escolas de todas as capitais do Brasil.

**A tabela mostrada substitui a tabela do anúncio veiculado neste jornal no dia 14 de março de 2013.

CAIQUE PORTO
Aprovado no ITA e no IME

ANNA SARAH
Aprovada no ITA

LUCAS FURQUIM
Aprovado no ITA e no IME

**QUANDO VOCÊ ESCOLHE UMA ESCOLA DE EXCELÊNCIA,
O MUNDO ESCOLHE VOCÊ.**

FARIAS BRITO
O MELHOR EM OLÍMPIADAS
E EM ESCOLAS MILITARES É TAMBÉM
O MELHOR NO ITA E NO IME.



ORGANIZAÇÃO EDUCACIONAL
FARIAS BRITO
Lições para toda a vida.
www.fariassbrito.com.br