Gravitação Universal – Com Gabarito

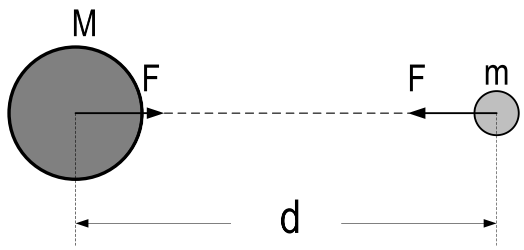
1. Lei da Gravitação Universal de Newton (1642-1727):

Apoiado nos estudos de Copérnico, Galileu e Kepler, Isaac Newton apresentou sua lei da Gravitação Universal.

Entre dois corpos quaisquer, pelo simples fato de terem massa, existe uma força de atração denominada força gravitacional.

A medida da força gravitacional é traduzida na apresentação da lei:

"A força gravitacional entre dois pontos materiais tem intensidade diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que os separa."



Matematicamente:

$$F = \frac{G \cdot m \cdot M}{d^2}, \text{ (eq.1)}$$

A constante de proporcionalidade **G** é denominada constante de gravitação universal (Obtido experimentalmente por **Cavendish**):

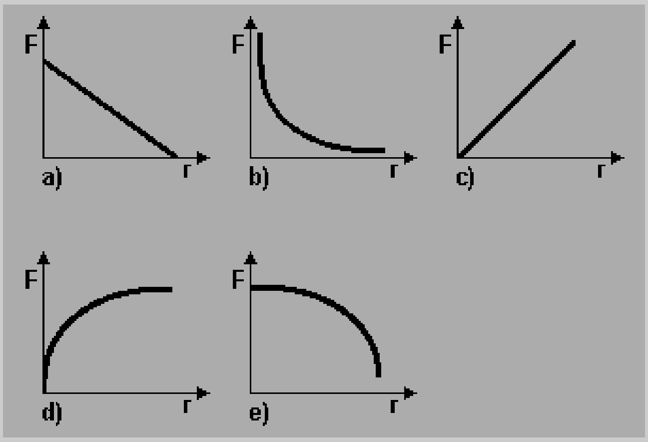
$$G \cong 6{,}7 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$$

A constante de gravitação universal independe dos corpos que se atraem, da distância ou do meio interposto entre os corpos.

Notas:
Força Gravitacional versus Força Eletrostática.
I. A força eletrostática pode ser de atração ou repulsão, porem a força gravitacional é sempre de atração;

II. A força eletrostática depende do meio interposto entre os corpos; a força gravitacional é sempre de atração;

Exemplo de classe: (UFC-04) Considere duas massas puntiformes sob ação da força gravitacional mútua. Assinale a alternativa que contém a melhor representação gráfica da variação do módulo da força gravitacional sobre uma das massas, em função da distância entre ambas.



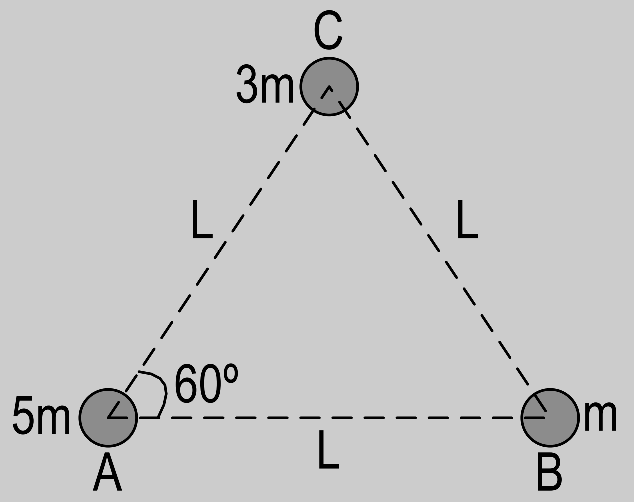
Resposta: B

Exemplos de classe: (Fuvest-2001) A Estação Especial Internacional, que está sendo construída num esforço conjunto de diversos países, deverá orbitar a uma distância do centro da Terra igual a 1,05 do raio médio da Terra. A razão $R = F_e/F$, entre a força Fe com que a Terra atrai um corpo nessa Estação e a força F com que atrai o mesmo corpo na superfície da Terra, é aproximadamente de

a) 0,02
b) 0,05
c) 0,10
d) 0,50
e) 0,90

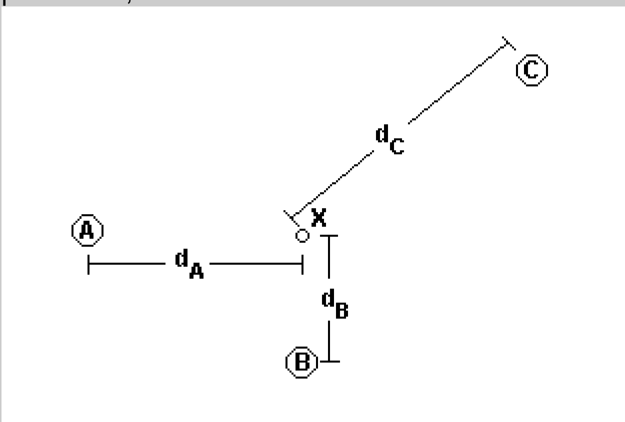
Resposta: E

Exemplos de classe: O professor Herbert Aquino pede que você calcule a força gravitacional resultante sobre a partícula de massa m.



Resposta: $F_R = \frac{7G \cdot m^2}{L^2}$

Exemplo de classe: (UERJ-08) A figura a seguir representa o instante no qual a resultante das forças de interação gravitacional entre um asteroide X e os planetas A, B e C é nula.



Admita que:
- d_A , d_B e d_C representam as distâncias entre cada planeta e o asteroide;
- os segmentos de reta que ligam os planetas A e B ao asteroide são perpendiculares e $d_C = 2d_A = 3d_B$;
- m_A , m_B , m_C e m_x representam, respectivamente, as massas de A, B, C e X e $m_A = 3m_B$.

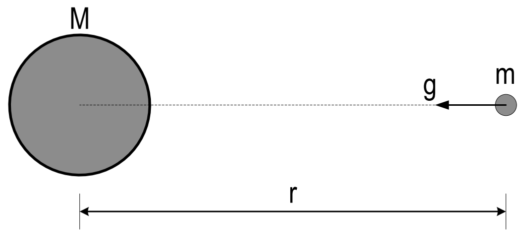
Determine a razão m_C/m_B nas condições indicadas.

Resposta: $m_C/m_B = 5$

2. Intensidade do Campo Gravitacional nas proximidades de um planeta:

a) Para pontos na superfície e externos a um planeta:

Um corpo atrai outros com uma força gravitacional mesmo que eles não estejam em contato entre si. Isto é explicado utilizando o **conceito de campo**. O espaço ao redor do corpo em que outros corpos experimentam uma força gravitacional é chamado de campo gravitacional.
Considere um corpo esférico homogêneo de massa M, iremos agora calcular a intensidade do campo gravitacional gerado por este corpo a uma distância r que atua sobre um corpo de prova de massa m.



Definição de Campo Gravitacional:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} \text{,(eq.2)}$$

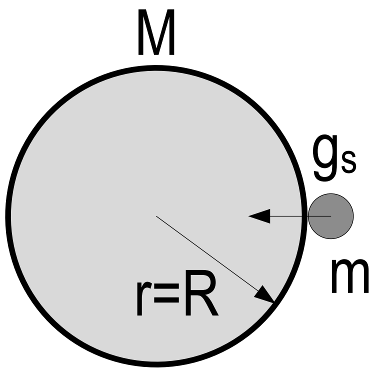
De acordo com a Lei da Gravitação Universal podemos escrever:

$$g = \frac{F}{m} = \frac{\frac{G \cdot m \cdot M}{r^2}}{m}$$

$$g = \frac{G \cdot M}{r^2} \text{,(eq.3)}$$

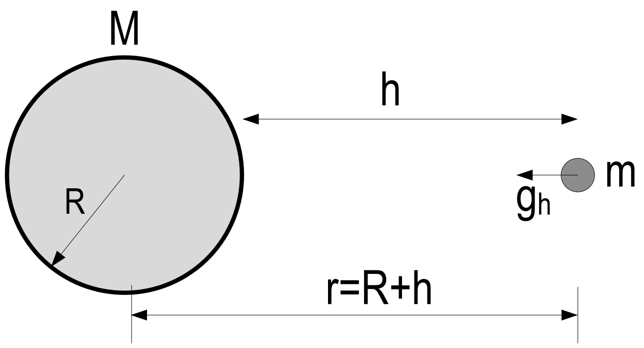
A expressão é utilizada para se calcular a aceleração da gravidade em pontos externos a superfície da Terra. A eq.3 nos mostra que à medida que nos afastamento do planeta, a aceleração da gravidade vai diminuindo (“enfraquecendo”). O professor Herbert Aquino, chama atenção para o fato de a aceleração da gravidade só depende da massa do planeta (diretamente proporcional) e do raio do planeta (inversamente proporcional ao quadrado).

Simplificando:
Para pontos na superfície do planeta (**r=R**) ,temos:



$$g_s = \frac{G\cdot M}{R^2},\text{(eq.4)}$$

Para pontos a uma altitude ***h*** da superfície do planeta, temos:



$$g_h = \frac{G\cdot M}{(R+h)^2},\text{(eq.5)}$$

É simples deduzir a relação abaixo:

$$g_h = g_s \cdot \left(\frac{R}{R+h}\right)^2,\text{(eq.6)}$$

Nota: Nas deduções acima consideramos o planeta esférico e homogêneo desprezando qualquer efeito de rotação.

Exemplo resolvido: (AFA-98-Modificada) A aceleração da gravidade na superfície da Terra, de raio R, é **g**. O professor Herbert Aquino pede que você calcule a altura, em relação à superfície, na qual a aceleração da gravidade valerá $g/9$.

Solução do professor Herbert Aquino:

Usando a relação mostrada anteriormente, temos:

$$g_h = g_s \cdot \left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$

$$\frac{g}{9} = g \cdot \left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$

$$\frac{1}{9} = \left(\frac{R}{R+h}\right)^2$$

$$\frac{1}{3} = \frac{R}{R+h}$$

$$h = 2R$$

Exemplo de classe: (UFPI-2002) Sendo R o raio da Terra, a que distância de sua superfície se encontra um objeto, quando a força gravitacional exercida pela Terra sobre ele for igual a 1% do valor de seu peso na superfície?
a) 3R
b) 6R
c) 9R
d) 12R
e) 15R
Resposta:C

Exemplo de classe: (UFPI-2002) Um planeta tem massa igual a duas vezes a massa da Terra e tem a forma de uma esfera cujo raio mede 20% do raio da Terra. O valor da força F exercida pelo planeta sobre um centímetro cúbico de água colocado em sua superfície é (a aceleração da gravidade na superfície da Terra é $g = 10\,m/s^2$), em newtons:
a) 500
b) 50
c) 5,0
d) 0,5
e) 0,05
Resposta: D

Exemplo resolvido: (FUVEST-07) Recentemente Plutão foi "rebaixado", perdendo sua classificação como planeta. Para avaliar os efeitos da gravidade em Plutão, considere suas características físicas, comparadas com as da Terra, que estão apresentadas, com valores aproximados, a seguir.

Massa da Terra (M_T) = 500 × Massa de Plutão (M_P)
Raio da Terra (R_T) = 5 ×Raio de Plutão (R_P)

a) Determine o peso, na superfície de Plutão (P_P), de uma massa que na superfície da Terra pesa 40N (P_T = 40N).
b) Estime a altura máxima H, em metros, que uma bola, lançada verticalmente com velocidade V, atingiria em Plutão. Na Terra, essa mesma bola, lançada com a mesma velocidade, atinge uma altura h_T = 1,5 m.

NOTE E ADOTE:
F = (GMm)/R²
Peso = mg

Resolução:
a) A aceleração da gravidade na superfície de qualquer astro é dada pela expressão:

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

Onde: M $\rightarrow$ massa do astro; R $\rightarrow$ raio do astro

$$g_P = \frac{GM_P}{R_P^2} = \frac{G\frac{M_T}{500}}{\left(\frac{R_T}{5}\right)^2} = \frac{1}{20}\cdot\frac{GM_T}{R_T^2} = \frac{1}{20}g_T$$

Como a gravidade em Plutão é vinte vezes menor que a terrestre, os corpos pesam 20 vezes menos.

$$P_T = 40N \rightarrow P_P = 2{,}0N$$

b) Em um lançamento vertical:

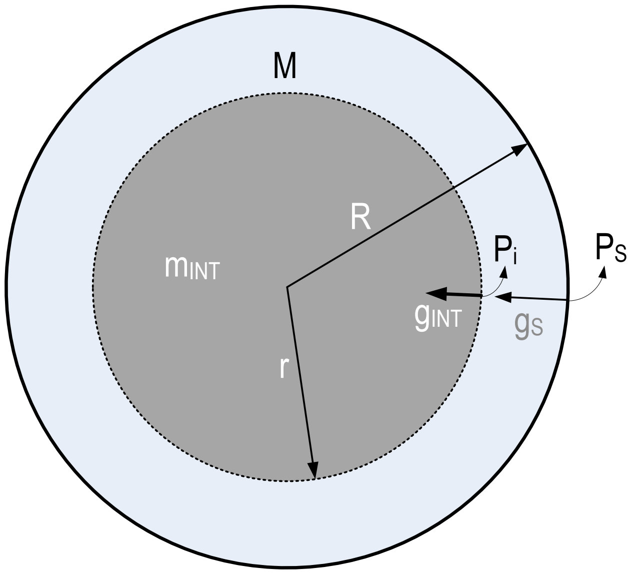
$$mgh = \frac{1}{2}mV^2 \rightarrow h = \frac{V^2}{2g}$$

Como a altura é inversamente proporcional a "g" e como a gravidade em plutão é 20 vezes menor que a terrestre, a altura alcançada será 20 vezes maior.

$$H_P = 20H_T = 30m$$

b) Para pontos no interior do planeta:

Agora supondo o planeta esférico e homogêneo, devido a razões de simetria **(Teorema da Casca de Newton),** a aceleração gravitacional em um ponto interno ao planeta a uma distância r do centro (C) do planeta é devido apenas à massa contida na esfera de centro C e raio r.



Assim, em um ponto P_i interno ao planeta e a uma distância r de seu centro, temos:

$$g_{INT} = \frac{G\cdot m_{INT}}{r^2}, \text{(eq.7)}$$

Considerando-se a densidade (**μ**) do planeta constante, podemos escrever:

$$\mu = \frac{M}{\frac{4\pi}{3}\cdot R^3} = \frac{m_{INT}}{\frac{4\pi}{3}\cdot r^3}$$

$$m_{INT} = \frac{M}{R^3}\cdot r^3 \text{(eq.8)}$$

Substituindo-se a eq.8 na eq.7, resulta:

$$g_{INT} = \frac{G}{r^2}\cdot\left(\frac{M}{R^3}\cdot r^3\right)$$

Reescrevendo a equação acima e usando a eq.4, vem:

$$g_{INT} = \left(\frac{G \cdot M}{R^2}\right) \cdot \frac{r}{R}$$

Finalmente:

$$g_{INT} = g_s \cdot \frac{r}{R}, \text{(eq.9)}$$

Conclusão importante: A eq.8 nos mostra que para pontos internos ao planeta a aceleração da gravidade é diretamente proporcional à distância ao centro da Terra.

Observações:

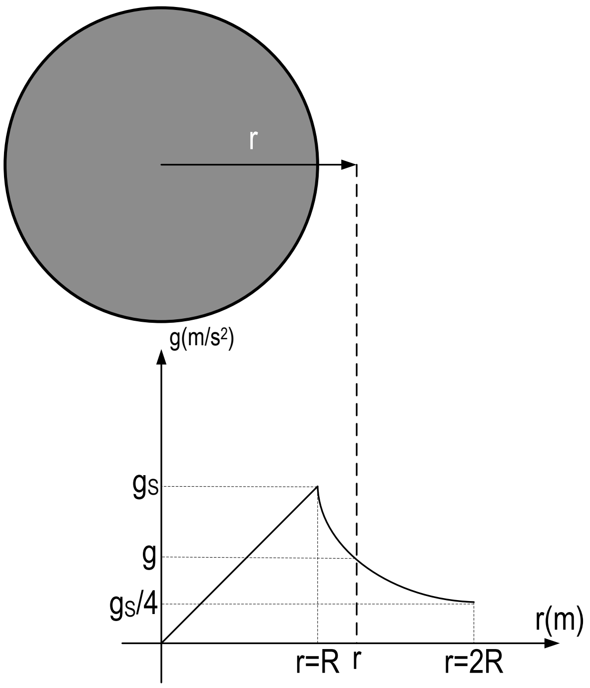
I. Para o centro do planeta (r=0), temos:

$$g_{INT} = 0$$

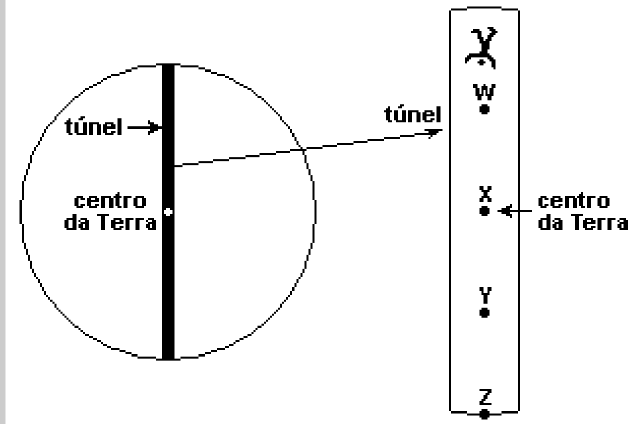
II. Para pontos na superfície (r=R), temos:

$$g_{INT} = g_s$$

Comportamento gráfico da aceleração da gravidade:



<u>Exemplo de classe</u>: (UERJ-06) Embora sua realização seja impossível, imagine a construção de um túnel entre os dois polos geográficos da Terra, e que uma pessoa, em um dos polos, caia pelo túnel, que tem 12.800 km de extensão, como ilustra a figura a seguir.

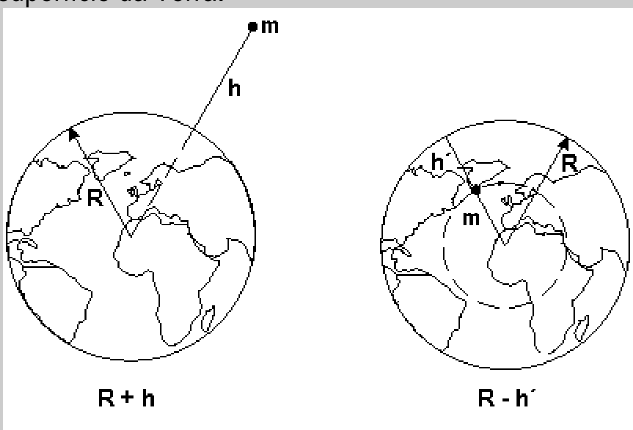


Admitindo que a Terra apresente uma constituição homogênea e que a resistência do ar seja desprezível, a aceleração da gravidade e a velocidade da queda da pessoa, respectivamente, são nulas nos pontos indicados pelas seguintes letras:

a) Y - W
b) W - X
c) X - Z
d) Z – Y

Resposta: C

<u>Exemplo de classe</u>: (UEL-09) Considerando a Terra uma esfera homogênea (densidade constante) de raio R, determine a profundidade h' em que deve ser colocado um corpo de massa m para que o seu peso seja o mesmo quanto estiver situado a uma altura h da superfície da Terra.



a) $h' = R - \dfrac{R^3}{(R+h)^2}$.

b) $h' = R - \dfrac{R^3}{(R+h)^3}$.

c) $h' = R - \dfrac{R^3}{(R-h)^2}$.

d) $h' = R - \frac{R^2}{(R-h)^3}$.

e) $h' = R - \frac{R^3}{(R-h)^3}$.

Resposta: A

Exemplos de classe: Qual a relação aproximada entre altura H de uma montanha e a profundidade h de uma mina se o período das oscilações de um pêndulo simples no pico da montanha e no fundo da mina for igual?

a) h=2H

b) h=H

c) $\sqrt{3}h = H$

d) $\sqrt{2}h = H$

e) H=3H

Resposta: A

Exemplos de classe: Determine a profundidade em relação à superfície terrestre em que deve se encontrar um corpo para que o valor da aceleração da gravidade local seja igual à aceleração da gravidade quando o corpo se encontra a uma altura R da superfície terrestre. Considere a Terra uma esfera homogênea de raio R e despreze os efeitos de rotação.

a) R/3

b) 3R/4

c) 2R/3

d) R/2

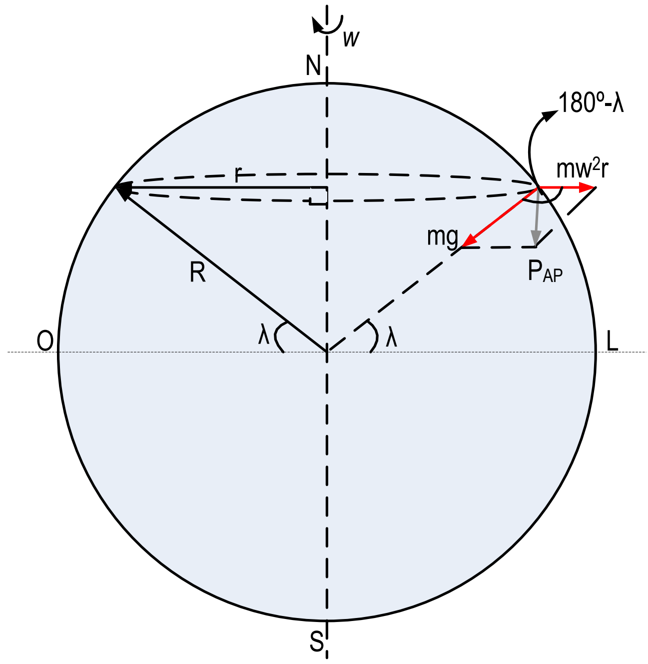
e) 4R/5

Resposta: B

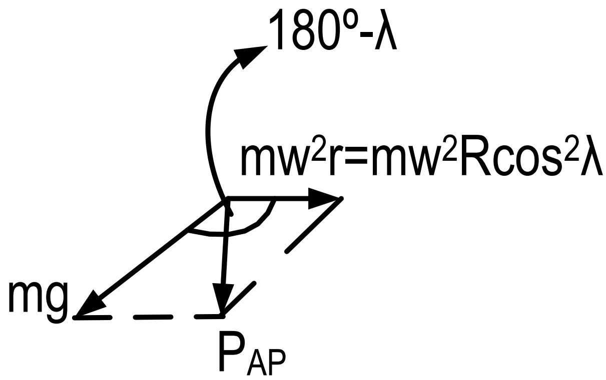
3. Efeito de rotação da Terra:

Agora suponha que a Terra possa ser considerada uma esfera homogênea perfeita de raio R e massa M, que rotaciona com uma velocidade angular w constante em torno do eixo polar (Norte-Sul). Se um corpo está sobre a superfície da Terra (em repouso em relação a Terra), então ele compartilha da mesma velocidade angular da Terra.

Considere uma partícula colocada em ponto na superfície da Terra cuja latitude é λ. Esta partícula descreve um círculo de raio r=R·cosλ. Sobre esta partícula atua uma força centrífuga $F_c = m \cdot w^2 \cdot r$ (força de inércia observada num referencial ligado à Terra) e a força peso ($P = m \cdot g$).



Vamos aplicar a **regra do paralelogramo** para determinarmos o peso aparente do corpo colocado em uma latitude λ:



$$P_{AP} = \sqrt{(mg)^2 + (mw^2r)^2 + 2(mg)(mw^2r)\cos(180^0 - \lambda)}$$

Substituindo-se r=R·cosλ na expressão acima e isolado o termo m² e na sequência extrair este termo da raiz quadrada, obtemos:

$$P_{AP} = m \cdot [g^2 + R^2w^4\cos^2\lambda - 2gRw^2\cos^2\lambda]^{1/2}$$

$$P_{AP} = mg\left[1 + \left(\frac{Rw^2}{g}\right)^2\cos^2\lambda - \frac{2Rw^2}{g}\cos^2\lambda\right]^{1/2} \quad \text{(eq.10)}$$

Dicas gerais para o ITA:
Cálculo do peso aparente em dois casos especiais:
I. Nos polos (λ=90º):
$P_{AP} = mg$
II. No equador (λ=0º):
$P_{AP} = mg - mw^2R$
De onde concluímos que:
$g_{AP} = g - w^2R$

$$g - g_{AP} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot R$$

$$g - g_{AP} \cong 0{,}034\ m/s^2$$

Observe que o valor da aceleração da gravidade no equador terrestre é ligeiramente do que o valor da aceleração da gravidade quando desprezamos a rotação da Terra.

III. Se o valor efetivo da aceleração da gravidade no equador fosse igual à zero $(g_{AP} = 0)$, a nova velocidade angular da Terra (w’) deveria ser igual a:
$g_{AP} = 0 = g - w'^2 \cdot R$

$$w' = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

O valor acima é aproximadamente 17 vezes maior que o valor atual da velocidade angular terrestre atual (w’=17·w).

<u>Exemplo resolvido</u>: (UFPA-87) Suponha que a velocidade de rotação da Terra aumentasse até que o peso de um objeto sobre o equador ficasse nulo. Sabendo que o raio da Terra valo 6400 km e que a aceleração da gravidade na superfície na superfície terrestre é 10 m/s^2, o período de rotação da Terra em torno de seu eixo valeria:
a) 800π s
b) 1000π s
c) 1200π s
d) 1600π s
e) 1800π s

Resolução do professor Herbert Aquino:
Para que o peso no equador se torne nulo, temos, que o valor efetivo da aceleração da gravidade no equador fosse igual à zero $(g_{AP} = 0)$, a nova velocidade angular da Terra (w’) deveria ser igual a:

$$g_{AP} = 0 = g - w'^2 \cdot R$$

$$w' = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

Como:

$$w' = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{R}{g}}$$

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{6400 \cdot 10^3}{10}}$$

$$T = 2 \cdot \pi \cdot 80 \cdot 10$$

$$T = 1600\pi\ s$$

<u>Exemplo resolvido</u>: (Problems in Physics) O professor Herbert Aquino pede que você determine a velocidade angular **w** de rotação da Terra em torno de seu eixo, para que o peso de uma pessoa no equador seja igual a $3/5$ do seu peso nos polos. Considere que a aceleração da gravidade nos polos terrestre é igual a **g** e que o raio da Terra é **R**.

Solução do professor Herbert Aquino:
Para que o peso no equador seja igual a $3/5$ do seu peso nos polos, temos, que o valor efetivo da aceleração da gravidade no equador fosse deverá ser $3/5$ do seu valor nos polos $(g_{AP} = \frac{3}{5}g)$, a nova velocidade angular da Terra (w’) deveria ser igual a:

$$g_{AP} = g - w^2R$$

$$\frac{3}{5}g = g - w^2R$$

$$w^2R = \frac{2}{5}g$$

$$w^2 = \frac{2 \cdot g}{5 \cdot R}$$

$$w = \sqrt{\frac{2 \cdot g}{5 \cdot R}}$$

<u>Exemplo resolvido</u>: (ITA-87) Considere a Terra como um corpo homogêneo, isotrópico e esférico de raio R, girando em torno do seu eixo, com frequência V (número de voltas por unidade de tempo), sendo g a aceleração da gravidade medida no equador. Seja V' a frequência com que a Terra deveria girar para que o peso dos corpos no equador fosse nulo. Podemos afirmar que:

a) V'=4V

b) V'=∞.

c) Não existe V' que satisfaça às condições do problema.

d) $V' = \left(V^2 + \frac{g}{4\cdot\pi^2\cdot R}\right)^{\frac{1}{2}}$

e) $V' = \left(V^2 - \frac{g}{4\cdot\pi^2\cdot R}\right)^{\frac{1}{2}}$

Resolução do professor Herbert Aquino:

No equador podemos escrever a aceleração na forma:

$g_E = g_p - w^2R$

Do enunciado temos: $g_E = g$

Assim podemos escrever na situação inicial:

$g_p = g + w^2R$

Se o valor efetivo da aceleração da gravidade no equador for igual à zero ($g'_E = 0$), a nova velocidade angular da Terra (w') deveria ser igual a:

$g_E = 0 = g_p - w'^2 \cdot R$

Logo:

$0 = g + w^2R - w'^2 \cdot R$

Escrevendo: $w' = 2\pi v'$ e $w = 2\pi v$

Logo: $(2\pi v')^2 = \frac{g}{R} + (2\pi v)^2$

Finalmente obtemos: $V' = \left(V^2 + \frac{g}{4\cdot\pi^2\cdot R}\right)^{\frac{1}{2}}$

<u>Exemplo resolvido</u>: (Poliedro) Sabe-se que, por causa do movimento de rotação de um planeta, a força gravitacional no equador é menor que nos polos. Suponha que o planeta é uma esfera de raio **R**. O período de rotação do planeta ao redor de seu eixo é **T** e a densidade média do planeta é **ρ**. O professor Herbert Aquino pede que você calcule a que altura **h** sobre a superfície do planeta em um dos polos a força gravitacional será igual à força gravitacional sobre a superfície do equador?

No equador:

$F_{CP} = F_G - P_{AP}$

$$m \cdot w^2 \cdot R = \frac{GmM}{R^2} - P_{AP}$$

Escrevendo a massa do planeta (M) em função de sua densidade temos:

$$M = \frac{4\pi\rho \cdot R^3}{3}$$

Lembre:

$$w = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T}$$

Logo a força gravitacional no equador (peso aparente=P_{AP}) será:

$$P_{AP} = \frac{Gm}{R^2} \cdot \left(\frac{4\pi\rho \cdot R^3}{3}\right) - \frac{m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot R}{T^2}$$

$$P_{AP} = Gm \cdot \left(\frac{4\pi\rho \cdot R}{3}\right) - \frac{m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot R}{T^2}$$

A força gravitacional numa altitude "h" é dada por:

$$F_G = \frac{GmM}{(R+h)^2}$$

Reescrevendo a equação acima:

$$F_G = \frac{Gm}{(R+h)^2}\left(\frac{4\pi\rho \cdot R^3}{3}\right)$$

Finalmente comparando-se:

$$F_G = P_{AP}$$

$$Gm \cdot \left(\frac{4\pi\rho \cdot R}{3}\right) - \frac{m \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot R}{T^2} = \frac{Gm}{(R+h)^2}\left(\frac{4\pi\rho \cdot R^3}{3}\right)$$

$$\frac{T^2 \cdot G \cdot \rho - 3 \cdot \pi}{3 \cdot T^2} = \frac{G \cdot \rho \cdot R^2}{3 \cdot (R+h)^2}$$

$$(R+h)^2 = \frac{G \cdot \rho \cdot R^2 \cdot T^2}{T^2 \cdot G \cdot \rho - 3\pi}$$

$$R + h = T \cdot R \cdot \left(\frac{G \cdot \rho}{T^2 \cdot G \cdot \rho - 3\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Finalmente:

$$h = R \cdot \left\{T \cdot \left(\frac{G \cdot \rho}{T^2 \cdot G \cdot \rho - 3\pi}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right\}$$

4. Energia no campo gravitacional: Energia Potencial Gravitacional

Consideremos um campo de forças atrativas, tal que a intensidade (F) da força de campo é inversamente proporcional ao quadrado da distância (r) entre os corpos que se atraem, isto é: $F = \frac{K}{r^2}$, em que K é uma constante característica dos corpos em questão.

Considerando-se nula a energia potencial do campo quando a distância d entre os corpos tende para infinito $U_{(d \to \infty)} = 0$, pode-se demonstrar, com auxílio de cálculo integral, que a energia potencial, associada ao campo de forças, será dada por:

$$U = -\frac{K}{r}$$

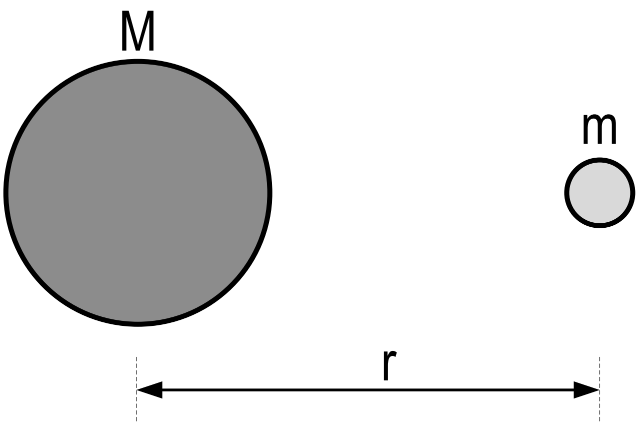
O fato de energia potencial ser negativa que dizer apenas que:

Em todos os pontos do campo, a energia potencial é menor do que no infinito.

Em outras palavras, poderíamos dizer que, para transportar os corpos que se atraem para o infinito, onde a energia do campo é zero, é preciso que um agente externo forneça energia aos corpos.

Assim, se a energia potencial do campo for de -50J, um agente externo ao campo deve fornecer aos corpos 50J de energia para transportá-los ao infinito.

É simples compreender que esta energia vai ser usada para vencer a força de atração que existe entre os corpos.

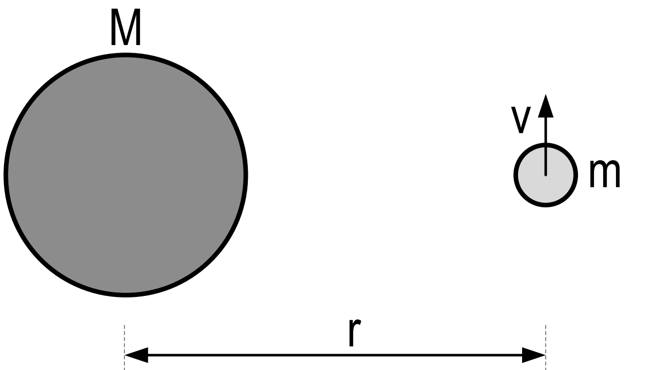


A energia potencial gravitacional associada ao sistema de corpos mostrado na figura acima é dada por:

$$U = -\frac{G \cdot m \cdot M}{r}$$

(Estudaremos este resultado nos apêndices de aprofundamento para o ITA).

Considere um corpo de massa m, animado de velocidade escalar v, a uma distância r do centro de massa da Terra conforme a figura a seguir.



Seja M a massa da Terra e G a constante de gravitação universal. A energia mecânica do sistema será dada por:

$$E = -\frac{G \cdot m \cdot M}{r} + \frac{m \cdot v^2}{2}, \text{ (eq.11)}$$

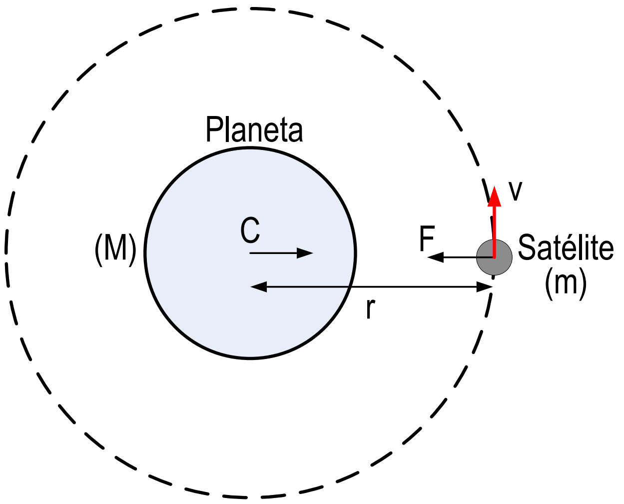
5. Estudo de um satélite em órbita:

Um satélite de um planeta, de acordo com as Leis de Kepler, pode estar em órbita elíptica ou circular e o seu movimento é mantido pela força de atração gravitacional aplicada pela Terra.

Na órbita elíptica, a velocidade linear de translação é variável e o movimento não é uniforme **(Estudaremos este caso nos apêndices de aprofundamento para o ITA).**

Estudaremos, no momento, um satélite em órbita circular e, portanto, com movimento uniforme.

a) Velocidade linear de translação:



Seja M a massa do planeta, r o raio da órbita e G a constante de gravitação universal. A força gravitacional que o planeta aplica sobre o satélite fará o papel de resultante centrípeta:

$$F_G = F_{CP}$$

$$\frac{G \cdot m \cdot M}{r^2} = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

Assim:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Conclusão: A velocidade de translação tem módulo dependente apenas da massa do planeta e do raio de sua órbita.

Para o mesmo planeta, quanto mais próximo for o satélite, maior será sua velocidade de translação.

Curiosidade ENEM: Em relação ao sistema solar, Mercúrio é o planeta que apresenta maior velocidade escalar média de translação (mais veloz dos planetas) e Plutão é o que apresenta menor velocidade escalar média de translação (mais lento dos “planetas”).

b) <u>Período de rotação (T)</u>:
Lembre:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Logo:

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M}}$$

Portanto, observe que também o período de um satélite só depende da massa do planeta e do raio de sua órbita.

c) <u>Terceira Lei de Kepler:</u>

Da equação acima, temos:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M} = \text{cte}$$

Na condição em que $M \gg m$.

d) <u>Energias</u>:

I. Energia Cinética:

Sendo $v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$ e m a massa do satélite, temos:

$$K = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{G \cdot m \cdot M}{2r}$$

II. Energia Potencial Gravitacional:

$$U = -\frac{G \cdot m \cdot M}{r}$$

Comparando-se as expressões das energias cinética e potencial, notamos que:
$U = -2K$

III. Energia mecânica:

$$E_m = K + U = K + (-2K)$$

$$E_m = -K$$

$$E_M = -\frac{G \cdot m \cdot M}{2r}$$

e) <u>Imponderabilidade no interior do satélite</u>:

A imponderabilidade, isto é, a sensação de ausência de peso (os corpos flutuam dentro da nave em órbita), não significa que inexista força gravitacional, mas apenas que está sendo “utilizada” como resultante centrípeta capaz de manter o corpo em órbita. Não há troca de forças de compressão (N=0) entre um astronauta e o chão da nave, de modo semelhante ao que ocorre quando, na Terra, um elevador está em queda livre e o passageiro não comprime o piso do elevador.

Quando um satélite está em órbita afirmamos que um objeto no seu interior e o próprio satélite "caem", em relação ao planeta, com a mesma aceleração ao longo de suas órbitas, aceleração esta imposta pela atração gravitacional do planeta.

Exemplo de classe: (UNESP-06) Depois de anos de interrupção, ocorreu neste ano (2005) a retomada de lançamentos do ônibus espacial pela NASA, desta vez com sucesso. Nas imagens divulgadas do dia no ônibus espacial girando ao redor da Terra, pudemos ver os astronautas realizando suas atividades, tanto fora da nave como no seu interior. Considerando que as órbitas da nave e dos astronautas sejam circulares, analise as afirmações seguintes.

I. Não há trabalho realizado pela força gravitacional para manter um astronauta em órbita ao redor da Terra.
II. A aceleração de um astronauta girando ao redor da Terra deve-se exclusivamente à ação da força gravitacional.
III. A velocidade vetorial do astronauta ao redor da Terra é constante.

Estão corretas as afirmações:
a) II, somente.
b) III, somente.
c) I e II, somente.
d) II e III, somente.
e) I, II e III.
Resposta: C

Exemplo de classe: (PUCRS- 06) Durante cerca de oito dias, um astronauta brasileiro dividiu com astronautas estrangeiros uma missão a bordo da Estação Espacial Internacional (EEI). Inúmeras fotografias da parte interna da Estação mostraram objetos e os astronautas "flutuando" no seu interior. Este fenômeno ocorre porque

I. a aceleração da gravidade sobre eles é zero.
II. os objetos e os astronautas têm a mesma aceleração da Estação.
III. não há força resultante sobre eles.

Pela análise das afirmativas conclui-se que somente está / estão correta(s)
a) a I.
b) a II.
c) a III.
d) a I e a III.
e) a II e a III.
Resposta:B

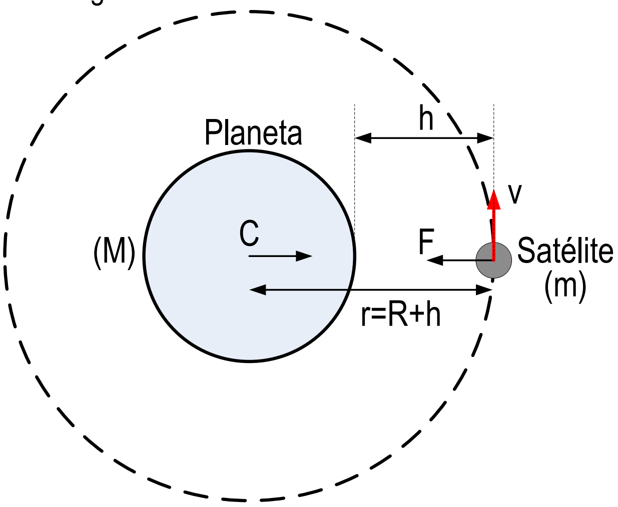
f) Satélite Estacionário:

Um satélite é dito estacionário quando ocupa sempre a mesma posição em relação a um referencial ligado à superfície do planeta.

Para que um satélite seja estacionário, ele deve satisfazer as seguintes condições:
I. Plano de órbita: a órbita deve estar contida no plano equatorial do planeta.
II. Trajetória: a órbita deve ser circular.
III. Período de Rotação: igual ao período de rotação do planeta.

O satélite estacionário tem aplicação em telecomunicações.

Dica ITA: Vamos calcular a que altura deve ficar um satélite geoestacionário.



Podemos escrever o período de rotação do satélite da seguinte forma:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{(R+h)^3}{g \cdot R^2}}$$

$$h = \left[\frac{T^2 \cdot g \cdot R^2}{4 \cdot \pi^2}\right]^{1/3} - R$$

Usando: T=86400s e $g = 10\,m/s^2$.
Substituindo-se os valores obtemos:
$h \cong 36000km$

Raio da órbita geoestacionária:
$r = R + h \cong 42000km$

Velocidade orbital de um satélite geoestacionário:
$v_0 = w \cdot r$

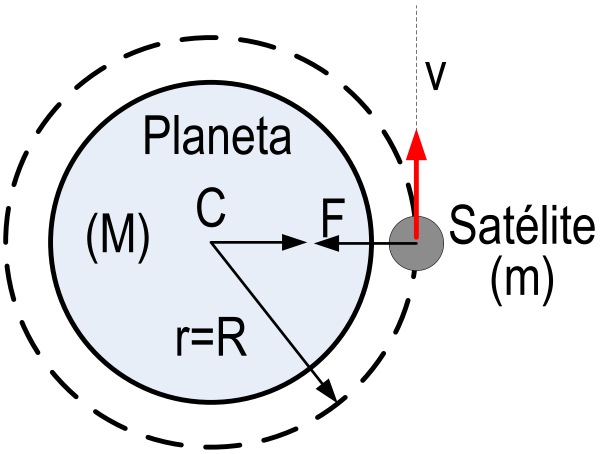
$$v_0 = \frac{2\pi}{T} \cdot r$$

$$v_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot 42000 \cdot 10^3}{86400}\,m/s$$

$v_0 \cong 3\,km/s$

e) **<u>Satélite rasante</u>**:

Para um satélite rasante (junto à superfície terrestre), desprezando o efeito do ar, temos:



$F_G = F_{CP}$

$$m \cdot g_0 = \frac{m \cdot v_0^2}{R}$$

$$v_0 = \sqrt{g_0 \cdot R}$$

Para a Terra, temos:

- Aceleração da gravidade nas proximidades da Terra: g_0=10m/s^2;
- Raio da Terra: R=6,4·10^{6}m;

$$v_0 = \sqrt{10 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6}\,m/s$$

$v_0 = 8{,}0 \cdot 10^3\,m/s = 8\,km/s$

Nota: A velocidade do satélite rasante corresponde à velocidade de lançamento horizontal de um corpo para transformá-lo em um satélite da Terra e é chamada de **velocidade cósmica primeira**.

<u>**Dica ITA**</u>: Período do satélite rasante:

$$v_0 = \frac{2\pi R}{T}$$

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{v_0}$$

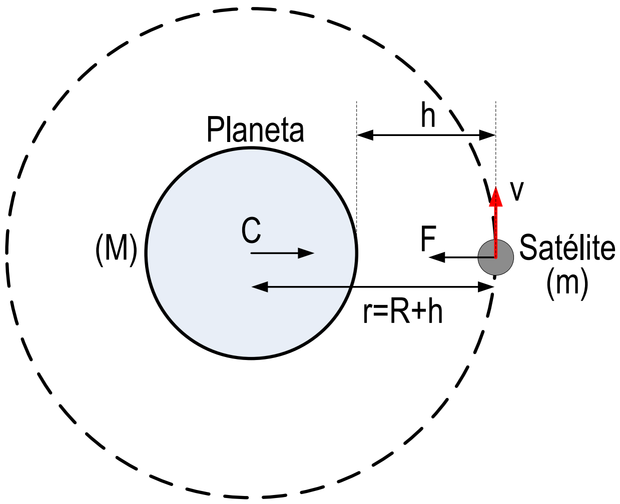
$$T = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6}{8{,}0 \cdot 10^3}$$

$T \cong 5024s \cong 83{,}7min$

Em termos práticos aproximamos o período do satélite rasante para 84 minutos.

<u>**Exemplo Resolvido:**</u> (ITA-1974) Um satélite artificial descreve uma órbita circular em torno da Terra com período $T = 4 \cdot \pi \cdot \sqrt{2R/g}$, onde R é o raio da Terra e g a aceleração da gravidade na superfície terrestre. A que altura acima da superfície se encontra o satélite?

Solução: Vamos calcular a que altura deve ficar um satélite artificial.



Podemos escrever o período de rotação do satélite da seguinte forma:

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M}}$$

Observando a figura acima temos: r=R+h.

Usando $g = \frac{G \cdot M}{R^2}$ (aceleração da gravidade na superfície do planeta), podemos escrever o período da seguinte forma:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{(R+h)^3}{g \cdot R^2}}$$

Comparando-se com a equação fornecida no problema:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{(R+h)^3}{g \cdot R^2}} = 4 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

$$\sqrt{\frac{(R+h)^3}{g \cdot R^2}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

$$\sqrt{\frac{(R+h)^3}{g \cdot R^2}} = \sqrt{\frac{8R}{g}}$$

$$\frac{(R+h)^3}{g \cdot R^2} = \frac{8R}{g}$$

$$(R+h)^3 = 8R^3$$

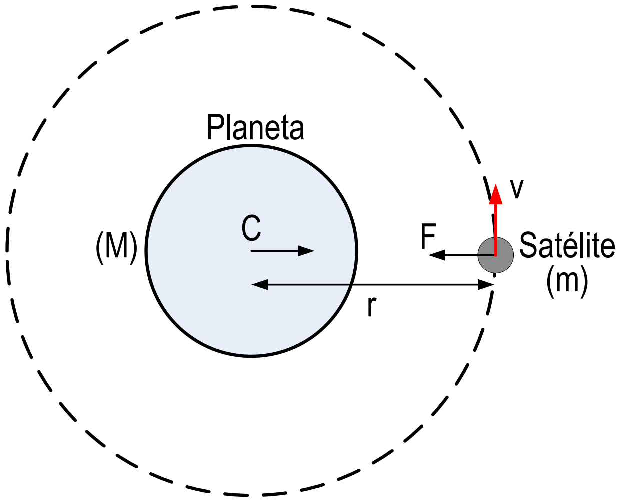
$$R + h = 2R$$

Finalmente:

$$h = R$$

Exemplo Resolvido: (IME-81/82) Mostre que o raio **r** da órbita da Lua pode ser determinado a partir do raio **R** da Terra, da aceleração da gravidade na superfície da Terra e do tempo **T** necessário para a Lua descrever uma volta completa em torno da Terra, ou seja, **r**=f(**g**,**R**,**T**).

Resolução:



Da Terceira Lei de Kepler:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M}$$

Usando $gR^2 = G \cdot M$ (g: aceleração da gravidade na superfície do planeta), assim podemos reescrever a equação:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{gR^2}$$

$$r^3 = \frac{gR^2T^2}{4 \cdot \pi^2}$$

$$r = \left[\frac{gR^2T^2}{4 \cdot \pi^2}\right]^{1/3}$$

Exemplo resolvido: (UFPB-11) Os satélites artificiais são uma conquista da tecnologia moderna e os seus propósitos são variados. Existem satélites com fins militares, de comunicação, de monitoramento etc. e todo satélite tem uma órbita e uma velocidade orbital bem determinadas. Nesse contexto, considere um satélite de comunicação que descreve uma órbita circular em torno da Terra com um período de revolução de 8 x10^4 *s*. Com base nessas informações e desprezando o movimento da Terra, é correto afirmar que esse satélite gira em torno da Terra com uma velocidade orbital de:

Dados:

Aceleração da gravidade: g = 10 m/s^2 .

Constante da gravitação universal: G = 6 x 10^{-11} N m^2 / kg^2

Massa da Terra: M = 6 x 10^{24} kg.

Constante π = 3.

a) 1000 m/s
b) 1500 m/s
c) 2000 m/s
d) 3000 m/s
e) 3500 m/s
Resposta: D

Resolução:
A força de atração gravitacional é a resultante centrípeta.

$$\frac{GMm}{r^2}=m\frac{v^2}{r}\rightarrow\frac{GM}{r}=v^2\rightarrow\frac{GM}{r}=\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2$$

$$r^3=\frac{GMT^2}{4\pi^2}=\frac{6x10^{-11}x6x10^{24}x64x10^8}{4x9}=64x10^{21}$$

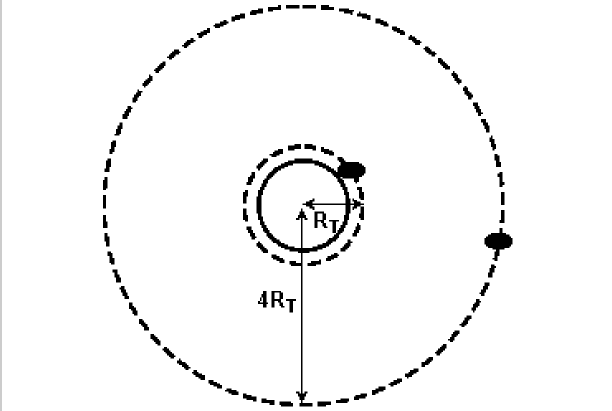
$$\rightarrow r=4x10^7 m$$

$$V=\frac{2\pi r}{T}=\frac{2x3x4x10^7}{8x10^4}=3000 m/s.$$

Exemplo de classe: (Fgvrj 2010) Muitos satélites utilizados em telefonia, transmissões de rádio e TV, internet e outros serviços de telecomunicações ocupam a órbita geoestacionária. Nesta órbita, situada no plano da linha do equador, os satélites permanecem sempre acima de um mesmo ponto da superfície terrestre, parecendo parados para um observador no equador. A altura de um satélite geocêntrico, em relação à superfície da Terra, em órbita circular, é aproximadamente igual a

Dados: G = constante de gravitação universal
M = massa da Terra
R = raio da Terra = 6, 4 x 10^6 m
$[G M / 4 \pi^2]^{1/3}$ = 2,2 x 10^4 m $s^{-2/3}$
$[24 \text{ horas}]^{2/3}$ = 2,0 x 10^3 $s^{2/3}$
a) 37600 km.
b) 50000 km.
c) 64000 km.
d) 12800 km.
e) 25000 km.
Resposta:A

Exemplo de classe: (FUVEST-05) Um satélite artificial, em órbita circular em torno da Terra, mantém um período que depende de sua altura em relação à superfície da Terra.



NOTE E ADOTE:
A força de atração gravitacional sobre um corpo de massa m é F= GmM/r^2, em que r é a distância entre a massa e o centro da Terra, G é a constante gravitacional e M é a massa da Terra.
Na superfície da Terra, F = mg em que g = GM/R^2; g = 10m/s^2 e R = 6,4 × 10^6m.
Considere π ≈ 3
Determine:

a) o período T_0 do satélite, em minutos, quando sua órbita está muito próxima da superfície. (Ou seja, está a uma distância do centro da Terra praticamente igual ao raio da Terra).
b) o período T_4 do satélite, em minutos, quando sua órbita está a uma distância do centro da Terra aproximadamente igual a quatro vezes o raio da Terra.

Resposta: a) 80 min b) 640min

6. Fuga do campo gravitacional da Terra:

A energia mecânica de um corpo, no campo gravitacional da Terra, é a soma de duas parcelas:

- A energia cinética $\frac{m\cdot v^2}{2}$, que é sempre positiva;
- A energia potencial $-\frac{G\cdot m\cdot M}{r}$, que é sempre negativa;

A respeito do valor da energia mecânica do corpo, temos três possibilidades:

a) $E_m > 0$: isto significa que o corpo tem energia mecânica suficiente para se libertar do campo gravitacional da Terra e ainda lhe sobra energia para prosseguir viagem. A energia cinética do corpo, fora do campo gravitacional da Terra ($U = 0$), será igual a sua energia mecânica.

b) $E_m = 0$: isto significa que a energia do corpo é apenas suficiente para escapar do campo gravitacional da Terra.

c) $E_m < 0$: isto significa que o corpo não tem energia suficiente para se libertar do campo gravitacional da Terra; nesse caso, ou retorna à superfície terrestre ou entra em órbita em torno da Terra.

Dizemos, então, que existe uma energia que mantém o corpo preso, ligado à Terra, impedindo-o de escapar do campo gravitacional terrestre. Essa energia é denominada "**energia de ligação**" entre o corpo e a Terra e constitui uma espécie de barreira gravitacional criada pela Terra. A energia de ligação é numericamente igual à energia mecânica do corpo com o sinal trocado, isto é:

$$E_L = -E_M = \frac{G \cdot m \cdot M}{r} - \frac{m \cdot v^2}{2}$$

<u>a) Energia de ligação entre a Terra e um corpo parado em sua superfície:</u>

Para um corpo parado, na superfície da Terra (r=R e v=0), temos:

$$E_L = \frac{G \cdot m \cdot M}{R}$$

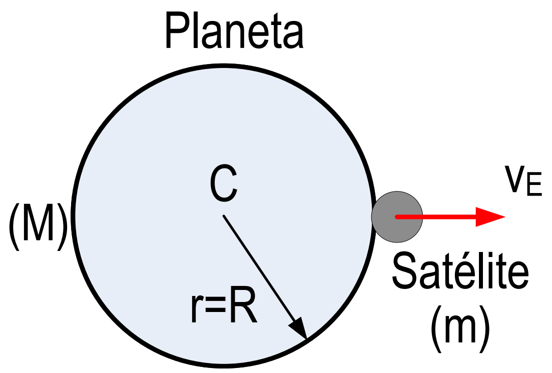
Sendo $g_0 = \frac{G \cdot M}{R^2}$ a aceleração da gravidade na superfície terrestre, podemos reescrever a equação acima na forma:

$$E_L = m \cdot g_0 \cdot R$$

b) <u>Velocidade de Escape</u>:

Denomina-se energia de escape a quantidade de energia mecânica mínima a ser fornecida a um corpo para que consiga "escapar" do campo gravitacional da Terra.

Em particular, para que um corpo parado na superfície da Terra consiga escapar de seu campo gravitacional, ele deve receber uma energia cinética maior ou igual à sua energia de ligação com a Terra.



Matematicamente:
$K \geq E_L$

ou

$$E_{ESCAPE} = E_L$$

$$\frac{m \cdot v^2}{2} \geq m \cdot g_0 \cdot R$$

Finalmente, podemos escrever:
$v \geq \sqrt{2 \cdot g_0 \cdot R}$

A velocidade escalar mínima de lançamento, para escapar ao campo gravitacional da Terra, será a velocidade de escape (v_E) dada por:
$v_E = \sqrt{2 \cdot g_0 \cdot R}$

Para a Terra, temos:

- Aceleração da gravidade nas proximidades da Terra: g_0=10m/s^2;
- Raio da Terra: R=6,4·10^{6}m;

$$v_E = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6}\ m/s$$
$$v_E = 8{,}0\sqrt{2} \cdot 10^3\ m/s$$
$$v_E = 8{,}0\sqrt{2} km/s \cong 11{,}2\ km/s$$

Portanto, a velocidade de escape do planeta Terra, isto é, a mínima velocidade com que devemos lançar um corpo para que não mais retorne à Terra, a partir de sua superfície, é de, aproximadamente, $11{,}2\ km/s$ (Em termos práticos o valor da velocidade de escape deve ser maior que este).

<u>Nota</u>: A velocidade de escape é característica de cada planeta, dependendo apenas de sua massa e raio, na suposição de não se considerar os efeitos de rotação do planeta:

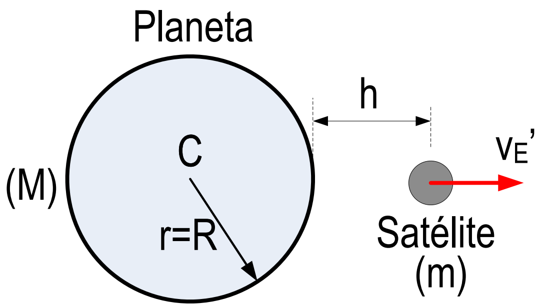
$$v_E = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}} = \sqrt{2 \cdot g_0 \cdot R}$$

A velocidade de escape é denominada **velocidade cósmica segunda**.

Curiosidade:

Dicas ITA:

I. Vamos calcular a velocidade de escape para um corpo colocado a uma altura h acima da superfície da Terra:

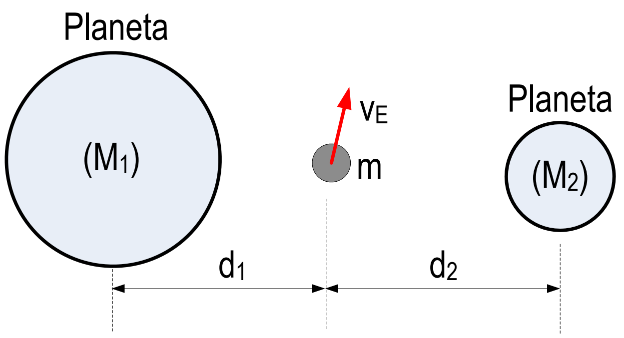


Por conservação da energia, temos:

$$-\frac{GmM}{(R+h)} + \frac{mv'^2_E}{2} = 0 + 0$$

$$v'^2_E = \sqrt{\frac{GM}{(R+h)}} < v_E$$

II. Cálculo da velocidade de escape para um corpo lançado entre dois planetas.

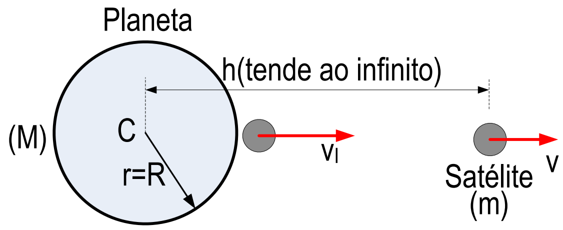


Por conservação da energia, temos:

$$-\left[\frac{G \cdot m \cdot M_1}{d_1} + \frac{G \cdot m \cdot M_2}{d_2}\right] + \frac{mv'^2_E}{2} = 0 + 0$$

$$v_E = \sqrt{2 \cdot \left[\frac{G \cdot M_1}{d_1} + \frac{G \cdot M_2}{d_2}\right]}$$

III. Se um corpo é projetado com uma velocidade maior que a velocidade de escape ($v_I = k \cdot v_E$,com $k > 1$) ,então, ele chegará ao "infinito" com velocidade não-nula. Assim, queremos determinar a velocidade do corpo ao atingir o infinito (v).



Por conservação da energia:

$$\frac{m(k \cdot v_E)^2}{2} - \frac{GmM}{R} = \frac{mv^2}{2} + 0$$

$$v = \sqrt{k^2 \cdot v_E^2 - \frac{2GM}{R}}$$

Lembrando que $v_E = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}}$, assim podemos escrever:

$$v = \sqrt{k^2 \cdot v_E^2 - v_E^2}$$

$$v = v_E \cdot \sqrt{k^2 - 1}$$

IV. Buraco Negro:

É uma região do espaço em que a concentração de massa é tão grande, que a força gravitacional é tão intensa, que a velocidade de escape é maior que a velocidade da luz no vácuo.

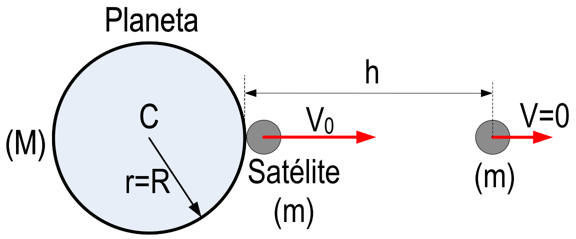
Cálculo do raio de horizonte:

$$v_E \geq c$$

$$\sqrt{\frac{2GM}{R}} \geq c$$

$$R \leq \frac{2GM}{c^2}$$

V. Cálculo da velocidade (v_0) necessária para um satélite atingir uma altura máxima h:



Por conservação da energia, temos:

$$-\frac{GmM}{R}+\frac{m\cdot v_0^2}{2}=-\frac{GmM}{(R+h)}$$

$$-\frac{GM}{R}+\frac{v_0^2}{2}=-\frac{GM}{(R+h)}$$

$$\frac{v_0^2}{2}=GM\cdot\left[\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right]$$

$$v_0^2=2GM\cdot\left[\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right]$$

$$v_0^2=2GM\cdot\left[\frac{R+h-R}{R(R+h)}\right]$$

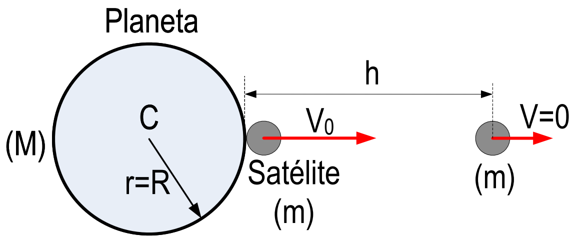
$$v_0=\sqrt{\frac{2GMh}{R(R+h)}}$$

Sendo a aceleração da gravidade na superfície do planeta igual a $g_o=\frac{G\cdot M}{R^2}$, temos:

$$v_0=\sqrt{\frac{2\cdot g_o\cdot R\cdot h}{(R+h)}}$$

Exemplo resolvido: (AFA-2001- Modificada) A partir da superfície da Terra, um foguete, sem propulsão, de massa m, é lançado verticalmente com velocidade v_0 e atinge uma altura máxima igual ao raio R da Terra. O professor Herbert Aquino que você calcule o módulo da velocidade inicial em função da massa da Terra (M) e da Constante de Gravitação Universal (G).

Solução:



Por conservação da energia, temos:

$$-\frac{GmM}{R}+\frac{m\cdot v_0^2}{2}=-\frac{GmM}{(R+h)}$$

$$-\frac{GM}{R}+\frac{v_0^2}{2}=-\frac{GM}{(R+h)}$$

$$\frac{v_0^2}{2}=GM\cdot\left[\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right]$$

$$v_0^2=2GM\cdot\left[\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right]$$

$$v_0^2=2GM\cdot\left[\frac{R+h-R}{R(R+h)}\right]$$

$$v_0=\sqrt{\frac{2GMh}{R(R+h)}}$$

Como h=R, temos:

$$v_0=\sqrt{\frac{2GMR}{R(R+R)}}$$

$$v_0=\sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Exemplo de classe: Um foguete de massa **m** é lançado verticalmente para cima, com uma velocidade **v** a partir da superfície da Terra de massa **M** e raio **R**. Considere a aceleração da gravidade na superfície terrestre igual a g ,o professor Herbert Aquino pede que você determine a altura máxima **h** que o projétil atinge acima da superfície terrestre.

Resposta: $h=\frac{R\cdot v^2}{(2gR-v^2)}$

Exemplo classe: Uma nave espacial se encontra em órbita rasante a superfície terrestre. O professor Herbert Aquino pede que você calcule o acréscimo de velocidade da nave espacial para que ela escape do campo gravitacional terrestre. Considere a aceleração da gravidade na superfície terrestre igual a $g=10\,m/s^2$ e o raio da Terra igual a R=6400 km.

c) Trajetória executada pelo corpo lançado a partir da superfície do planeta :
Se lançarmos um corpo horizontalmente, de um ponto bem próximo à superfície terrestre, não levando em conta a rotação e nem a resistência do ar, teremos:

I. Para $v < 8\,km/s$: Trajetória parabólica, o projétil retorna a superfície do planeta.

II. Para $v = 8\,km/s$: O projétil passa a executar uma trajetória circular de período aproximado de 84 min.

III. Para $8\,km/s < v < 11{,}2\,km/s$: O projétil assume órbita elíptica.

IV. Para $v = 11{,}2\,km/s$: O projétil assume trajetória parabólica , não mais retornando à Terra.

V. Para $v > 11{,}2\,km/s$: O projétil assume trajetória hiperbólica, não mais retornando à Terra.

7. Complementos para o ITA e OBF:

A. Gravitação no Interior da Terra:

Newton resolveu o problema da atração entre a Terra e maçã provando um importante teorema, conhecido como teorema das cascas:

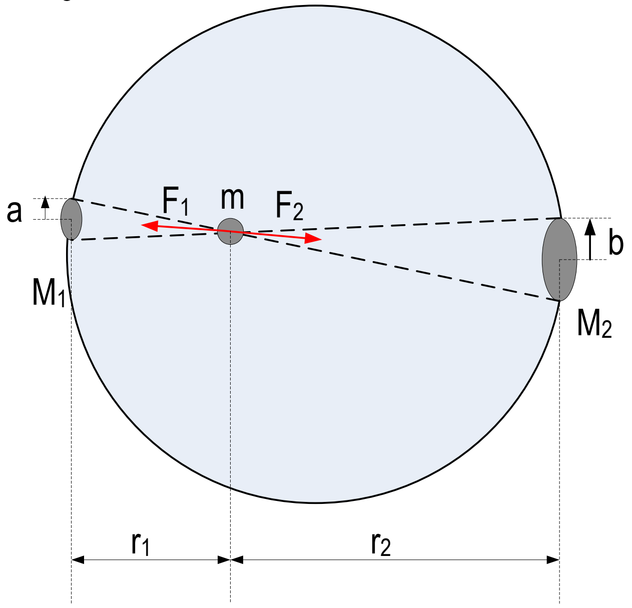
Uma casca esférica uniforme de matéria atrai uma partícula que se encontra fora da casca como se toda a massa da casca estivesse concentrada no seu centro.

O teorema das cascas de Newton também pode ser aplicado a uma situação na qual a partícula se encontra no interior de uma casca uniforme, para demonstrar o seguinte:

Uma casca uniforme de matéria não exerce força gravitacional resultante sobre uma partícula localizada no seu interior.

Atenção: Esta afirmação não significa que as forças gravitacionais exercidas pelos vários elementos da casca sobre a partícula desaparecem magicamente, mas apenas que a *resultante* de todas as forças gravitacionais que agem sobre a partícula é nula.

Demonstração importante:
Vamos agora calcular a intensidade da força gravitacional que atua sobre uma partícula de massa m localizada no interior de uma casca esférica homogênea.



Escolhemos agora porções infinitesimais da casca esférica homogênea, de massa M_1 e M_2, que são colineares com a partícula de massa m.

Na figura acima, a partícula de massa m interage com a porção esférica de massa M_1 e estabelece uma força de interação gravitacional dada por:

$$F_1 = \frac{G \cdot M_1 \cdot m}{r_1^2}$$

De forma análoga, a partícula de massa m interage com a porção esférica de massa M_2 e estabelece uma força de interação gravitacional dada por:

$$F_2 = \frac{G \cdot M_2 \cdot m}{r_2^2}$$

Assim a força gravitacional resultante é dada por:

$$F_R = F_1 - F_2$$

$$F_R = \frac{G \cdot M_1 \cdot m}{r_1^2} - \frac{G \cdot M_2 \cdot m}{r_2^2}$$

$$F_R = G \cdot m \cdot \left[\frac{M_1}{r_1^2} - \frac{M_2}{r_2^2}\right]$$

Observando a figura e considerando porções esféricas infinitesimais temos que as áreas superficiais podem ser aproximadas por círculos de raios **a** e **b**.

Lembrando: $\text{Densidade} = \frac{\text{Massa}}{\text{Volume}}$

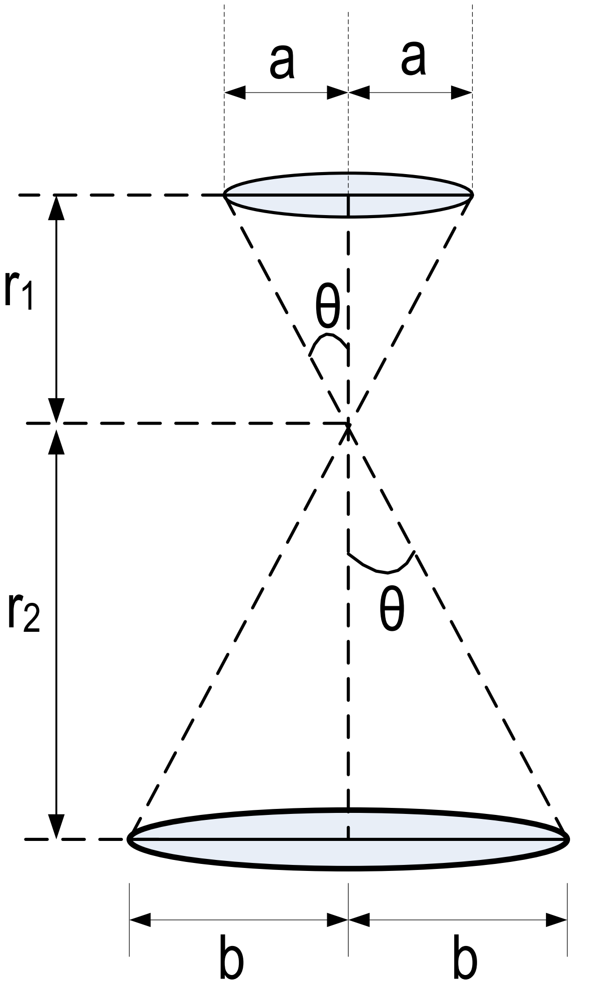
$$d = \frac{M_1}{L \cdot \pi \cdot a^2} = \frac{M_2}{L \cdot \pi \cdot b^2} = \text{constante}$$

Onde: L é espessura da casca.

Logo:

$$\frac{M_1}{a^2} = \frac{M_2}{b^2} = \text{constante}$$

Observando-se que as porções possuem um perfil das áreas em destaque (quase plana), obtemos a figura abaixo:



Da geometria da figura acima, obtemos:

$$\text{tg}\theta = \frac{a/2}{r_1} = \frac{b/2}{r_2}$$

$$\frac{a}{r_1} = \frac{b}{r_2}$$

Elevando-se ao quadrado:

$$\left(\frac{a}{r_1}\right)^2 = \left(\frac{b}{r_2}\right)^2$$

Utilizando as relações anteriores:

$$\frac{M_1}{a^2} = \frac{M_2}{b^2} \rightarrow \frac{M_1}{b^2 \cdot \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} = \frac{M_2}{b^2}$$

De onde obtemos:

$$\frac{M_1}{r_1^2} = \frac{M_2}{r_2^2}$$

Assim, concluímos que:

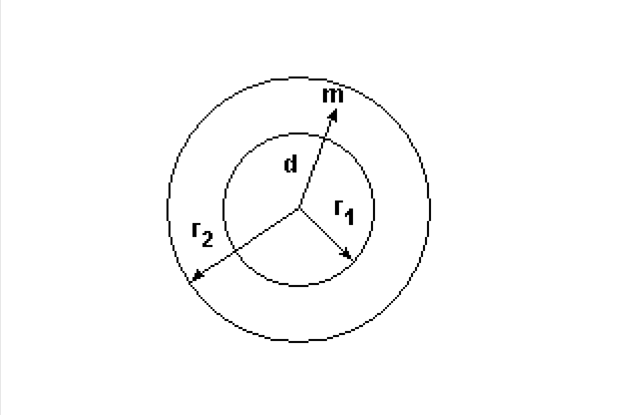
$$F_R = 0$$

A força gravitacional resultante sobre a partícula de massa m no interior da casca é nula. Se continuarmos nossa análise para outro par de pequenas porções esféricas de massa colineares com **m**, também resulta em uma força gravitacional resultante nula sobre **m**.

Nota: O módulo da aceleração da gravidade em pontos localizados no interior de uma casca esférica é nulo.

$$g_{\text{INTERIOR}} = 0$$

Exemplo de classe: (UECE-08) Duas cascas esféricas concêntricas, de densidades uniformes, têm massas M_1 (raio r_1) e M_2 (raio r_2), como mostra a figura.



Assinale a alternativa que contém o valor da força gravitacional sobre uma partícula de massa m localizada entre as cascas, a uma distância d dos seus centros.

a) $Gm\,[(M_1 + M_2)/d^2]$
b) $Gm\,[(M_1/r_1^2) + (M_2/r_2^2)]$
c) $Gm\,[(M_1 - M_2)/d^2]$
d) $G\,(mM_1/d^2)$
Resposta: D

Exemplo de classe: (OBF) Em seu trabalho sobre gravitação universal, Newton demonstrou que uma distribuição esférica homogênea de massa surte o mesmo efeito que uma massa concentrada no centro de distribuição. Se no centro da Terra fosse recortado um espaço oco esférico com metade do raio da Terra, o módulo da aceleração na superfície terrestre diminuiria para (**g** é o módulo da aceleração da gravidade na superfície terrestre sem a cavidade):

a) $\frac{3}{8}g$

b) $\frac{1}{2}g$

c) $\frac{5}{8}g$

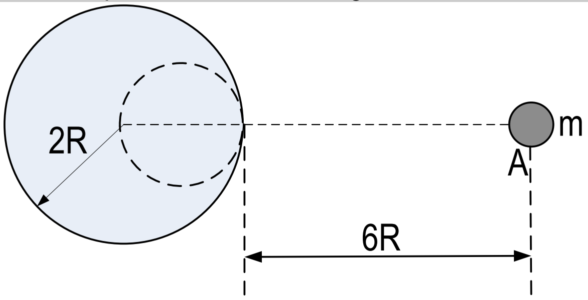
d) $\frac{3}{4}g$

e) $\frac{7}{8}g$

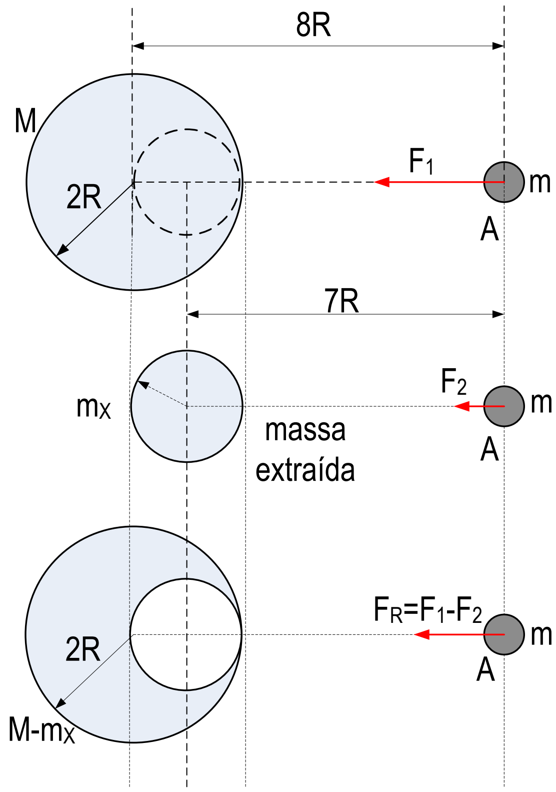
Resposta: E

B. Princípio da Superposição aplicado a problemas de Gravitação Universal:

Exemplo resolvido: Numa esfera de chumbo de raio 2R, faz-se uma cavidade esférica de tal modo que a sua superfície toca a superfície externa da esfera de chumbo e passa pelo centro desta. A massa da esfera antes que a cavidade externa fosse feita era M. Com que força, de acordo com a lei da gravitação universal, a esfera de chumbo irá agora atrair uma pequena esfera de massa m, que se encontra a uma distância 6R de superfície conforme a figura abaixo.



Solução:
A interação gravitacional entre a esfera (com a massa extraída) e a esfera de massa m pode ser analisada usando o princípio da superposição. Primeiramente calculamos o efeito de toda a esfera maciça de massa M sobre a partícula de massa **m**, em seguida estuda-se o efeito da parte retirada e por fim determinamos o efeito resultante da esfera com a cavidade sobre a partícula de massa **m**.



Para a esfera maior (M) e para cavidade esférica extraída (m_X) a massa é distribuída uniformemente, assim, a densidade é constante, dessa forma escrevemos:

$$d = \frac{M}{\frac{4 \cdot \pi \cdot (2R)^3}{3}} = \frac{m_X}{\frac{4 \cdot \pi \cdot R^3}{3}}$$

$$\frac{m_X}{M} = \left(\frac{R}{2R}\right)^3$$

$$m_X = \frac{M}{8}$$

Após determinarmos a massa que foi extraída, vamos usar a lei da gravitação universal e determinar a forças de interação gravitacional.

A força de interação entre a esfera maciça e a partícula

$$F_1 = \frac{GMm}{(8R)^2} = \frac{GMm}{64 \cdot R^2}$$

Se a esfera extraída de raio R interage com a partícula de massa m, a força é dada por:

$$F_2 = \frac{G \cdot M_X \cdot m}{(7R)^2} = \frac{GMm}{8 \cdot 49 \cdot R^2}$$

Agora, a interação da esfera grande (com a massa extraída) e a partícula colocada em A, será uma força gravitacional de módulo igual a $F_R = F_1 - F_2$. Esse pensamento é válido no sentido em que ao extrair certa massa da esfera, esta parte não exercerá mais atração sobre a partícula, portanto, a ação da esfera sobre a partícula diminui deste valor. Logo a interação da esfera com a partícula é igual a:

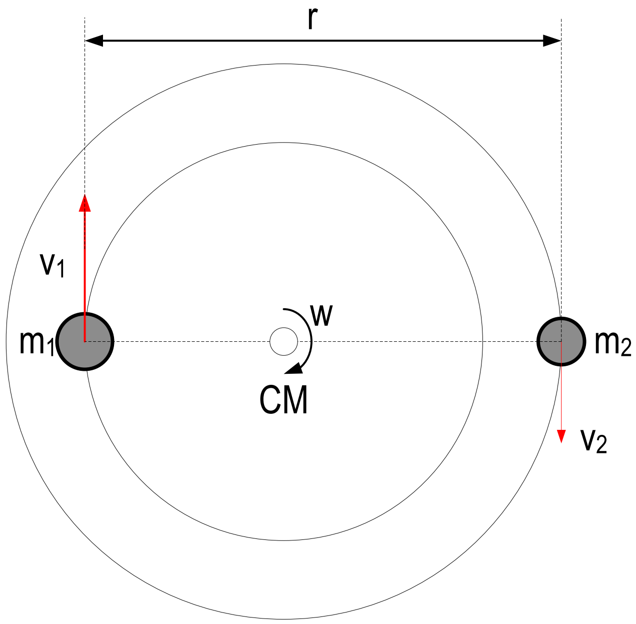
$$F_R = F_1 - F_2$$

$$F_R = \frac{GMm}{64 \cdot R^2} - \frac{GMm}{8 \cdot 49 \cdot R^2}$$

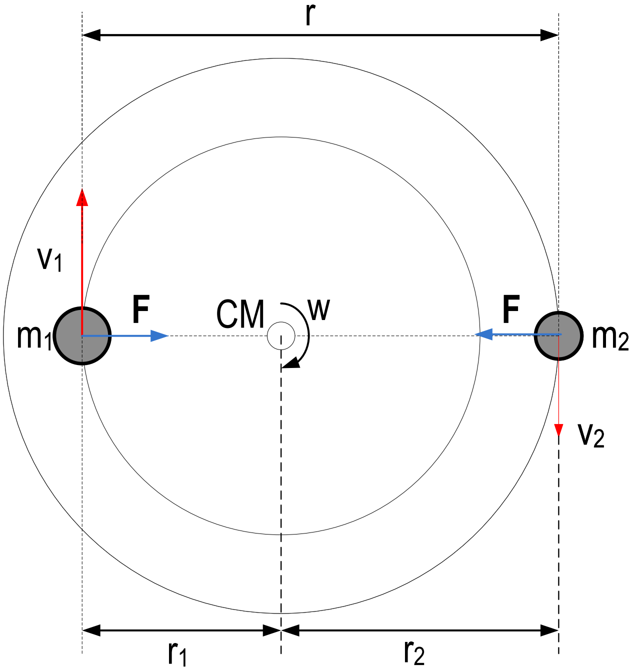
$$F_R = \frac{41 \cdot G \cdot M \cdot m}{3136 \cdot R^2}$$

C. Estrela binária:

Considere uma estrela binária formada por duas estrelas de massas **m_1** e **m_2** separadas por uma distância **r** em que ambas girando em torno do centro de massa com a mesma velocidade angular conforme a figura abaixo. Nosso objetivo neste complemento é determinar o período de rotação do sistema e o valor da velocidade orbital de cada uma das estrelas.



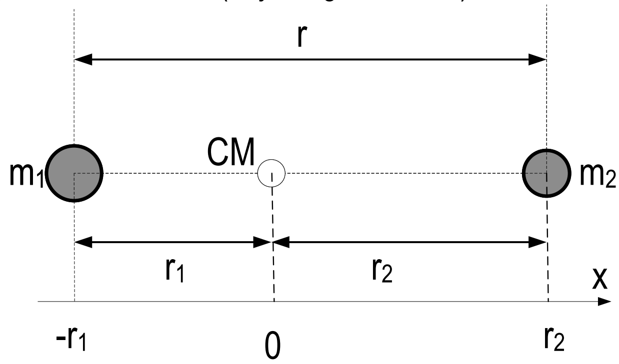
No sistema não atuam forças externa (força gravitacional entre as estrelas é interna ao sistema), assim o momento linear total do sistema e a velocidade do centro de massa permanece constante em relação a um referencial inercial, estando o centro de massa do sistema em repouso (v_{CM}=0, pois há uma compensação da quantidade de movimento das partículas$|m_1 v_1| = |m_2 v_2|$). As partículas apenas apresentam movimento de rotação em torno do centro de massa.



Sejam $\mathbf{r_1}$ e $\mathbf{r_2}$ as distâncias de m_1 e m_2 do centro de massa do sistema e **r** a distancia entre elas indicadas na figura acima. Então, podemos escrever:

$$r = r_1 + r_2$$

Como o centro de massa permanece em repouso, podemos escrever (Veja a figura abaixo):



$$X_{CM} = 0 = \frac{m_1 \cdot (-r_1) + m_2 \cdot r_2}{m_1 + m_2}$$

De onde vem:

$$m_1 r_1 = m_2 r_2$$

Determinando r_1:

Logo: $r_2 = \frac{m_1 \cdot r_1}{m_2}$

De onde escrevemos:

$$r_1 + r_1 \cdot \frac{m_1}{m_2} = r$$

$$r_1 \cdot \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right) = r$$

$$r_1 = \frac{m_2 \cdot r}{(m_1 + m_2)}$$

Determinando r_2:

$$r_2 = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{m_2 \cdot r}{(m_1 + m_2)}$$

$$r_2 = \frac{m_1 \cdot r}{(m_1 + m_2)}$$

Agora iremos determinar a velocidade orbital de cada uma das estrelas:

Para a estrela de massa m_1:

A força gravitacional está atuando como força resultante centrípeta, de onde podemos escrever:

$$\frac{Gm_1 m_2}{r^2} = \frac{m_1 v_1^2}{r_1}$$

$$\frac{Gm_2}{r^2} = \frac{v_1^2}{\frac{m_2 \cdot r}{(m_1 + m_2)}}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{Gm_2^2}{(m_1 + m_2) \cdot r}}$$

Para a estrela de massa m_2:

A força gravitacional está atuando como força resultante centrípeta, de onde podemos escrever:

$$\frac{Gm_1 m_2}{r^2} = \frac{m_2 v_2^2}{r_2}$$

$$\frac{Gm_1}{r^2} = \frac{v_1^2}{\frac{m_1 \cdot r}{(m_1 + m_2)}}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{Gm_1^2}{(m_1 + m_2) \cdot r}}$$

Cálculo do período de revolução do sistema binário formado pelas estrelas:

$$T = \frac{2\pi r_1}{v_1}$$

$$T = \frac{2\pi \cdot \left[\frac{m_2 \cdot r}{(m_1 + m_2)}\right]}{\sqrt{\frac{Gm_2^2}{(m_1 + m_2) \cdot r}}}$$

De onde, finalmente obtemos:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot (m_1 + m_2)}}$$

Como o sistema é isolado, ambas as estrelas descrevem órbitas circulares em torno do centro de massa com o mesmo período.

Caso especial: Outro ponto de vista para o sistema binário (Interação Terra- Satélite)

Usando: $m_1 = M$ e $m_2 = m$

Na aproximação: $m \ll M$

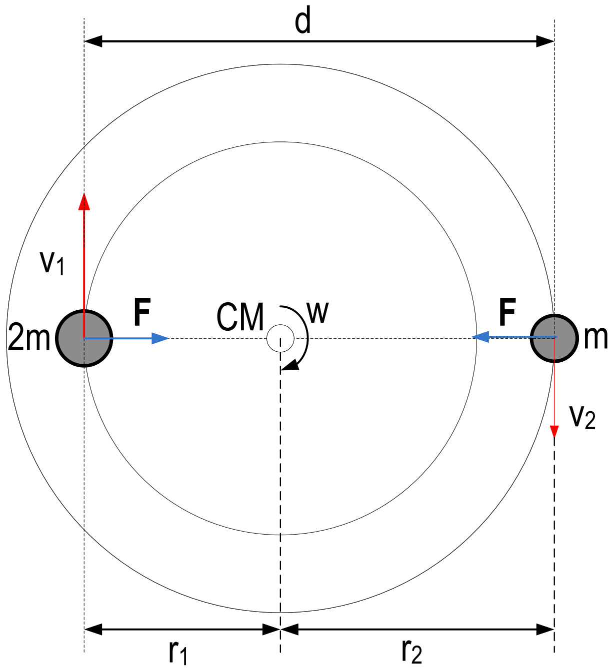
Obtemos: $v_1 \cong 0 = V$(Terra em repouso)

Para o satélite: $v_2 = v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ (velocidade orbital)

$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M}}$(período do satélite em órbita)

Exemplo Resolvido: Duas estrelas de massas **m** e **2m** respectivamente, separadas por uma distância **d** e bastante afastadas de qualquer outra massa considerável, executam movimentos circulares em torno do centro de massa comum. Nestas condições, o professor Herbert Aquino pede que você calcule o tempo para uma revolução completa e a velocidade da massa **2m**.

Solução do professor Herbert Aquino:



Usando os resultados obtidos anteriormente:

$$r_1 = \frac{m_2 \cdot r}{(m_1 + m_2)} = \frac{m \cdot d}{3m} = \frac{d}{3}$$

$$r_2 = \frac{m_1 \cdot r}{(m_1 + m_2)} = \frac{2m \cdot d}{3m} = \frac{2d}{3}$$

Período:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot (m_1 + m_2)}}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{d^3}{G \cdot 3m}}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{d^3}{3 \cdot G \cdot m}}$$

Cálculo da velocidade da estrela de massa **2m**:

$$v_1 = \sqrt{\frac{Gm_2^2}{(m_1 + m_2) \cdot r}}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{G \cdot m^2}{3m \cdot d}}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{G \cdot m}{3 \cdot d}}$$

Exemplo de classe: (ITA-12) Boa parte das estrelas do Universo formam sistemas binários nos quais duas estrelas giram em torno do centro de massa comum, CM. Considere duas estrelas esféricas de um sistema binário em que cada qual descreve uma órbita circular em torno desse centro. Sobre tal sistema são feitas duas afirmações:

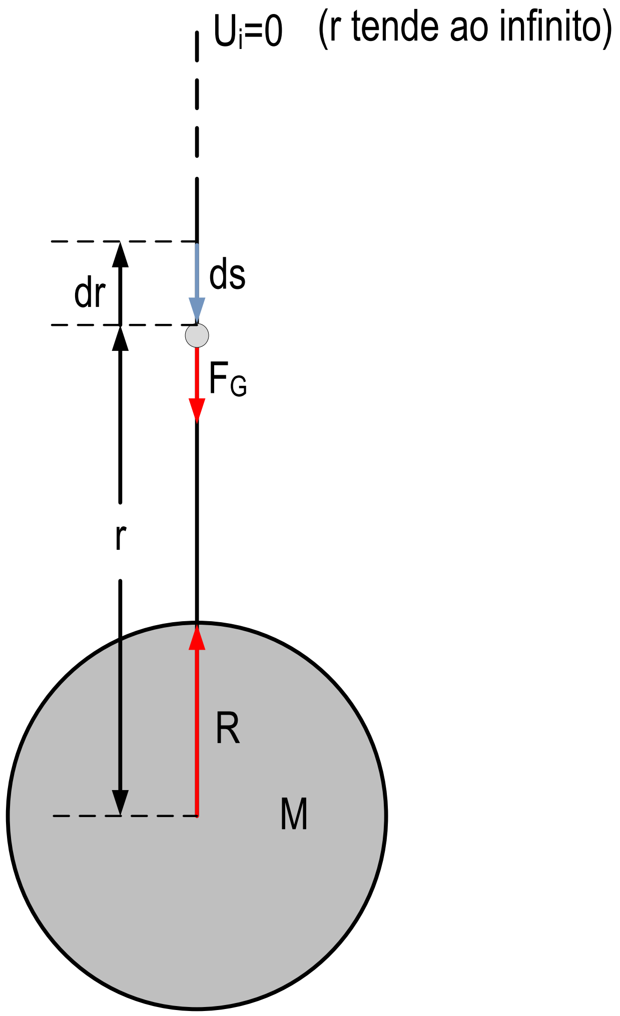
I. O período de revolução é o mesmo para as duas estrelas e depende apenas da distância entre elas, da massa total deste binário e da constante gravitacional.
II. Considere que $\vec{R_1}$ e $\vec{R_2}$ são os vetores que ligam o CM ao respectivo centro de cada estrela. Num certo intervalo de tempo Δt, o raio vetor $\vec{R_1}$ varre uma certa área A. Durante este mesmo intervalo de tempo, o raio vetor $\vec{R_2}$ também varre uma área igual a A.

Diante destas duas proposições, assinale a alternativa correta.
a) As afirmações I e II são falsas.
b) Apenas a afirmação I é verdadeira.
c) Apenas a afirmação II é verdadeira.
d) As afirmações I e II são verdadeiras, mas a II não justifica a I.
e) As afirmações I e II são verdadeiras e, além disso, a II justifica a I.

Resposta: B

D. Energia potencial gravitacional (Demonstração de aprofundamento ITA):

Suponha que uma partícula esteja inicialmente infinitamente separada da superfície da Terra. Estamos interessados em encontrar uma expressão para a energia potencial gravitacional U da bola no ponto P da sua trajetória, a uma distância R do centro da Terra, para isso, primeiro calculamos o trabalho W_{FG} realizado pela gravitacional de uma distância muito grande (infinita) da Terra até o ponto P (distância r do centro da Terra).Como a força gravitacional é variável, usaremos o cálculo integral.



$$\Delta U = W_{AE} = -W_{FG}$$

$$\Delta U = U_F - U_I = -W_{FG}$$

Condições:
1. Para $r = \infty$, temos: $U_I = 0$.
2. Para $r = r$, temos: $U_F = U$.

$$U = -W_{FG} = -\int \vec{F_G} \cdot d\vec{s}$$

$$U = -\int F_G \cdot ds \cdot \cos 0$$

Da figura: $d\vec{s} = -d\vec{r}$

Podemos reescrever a equação:

$$U = -\int_{\infty}^{r} F \cdot (-dr)$$

$$U = \int_{\infty}^{r} \frac{G \cdot m \cdot M}{r^2} \cdot (dr)$$

$$U = G \cdot m \cdot M \int_{\infty}^{r} r^{-2} \cdot (dr)$$

Fazendo o cálculo da integral obtemos:

$$U = -G \cdot m \cdot M \cdot \left[\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r}$$

$$U = -G \cdot m \cdot M \cdot \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right]$$

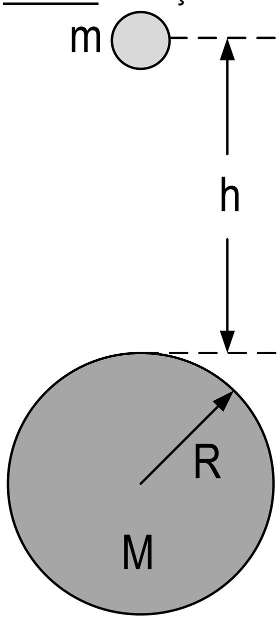
Finalmente:

$$U = -\frac{G \cdot m \cdot M}{r}$$

Nota 1: A energia potencial dada pela equação $U = -\frac{G \cdot m \cdot M}{r}$ é uma propriedade do sistema das duas partículas e não de uma delas isolada. Para o sistema Terra-Partícula, $M \gg m$ é comum falarmos em energia potencial da partícula.

Nota 2: O trabalho realizado pela força gravitacional é independente da trajetória (Força conservativa).

Detalhe: Variação da energia potencial.



Quando tomamos o infinito como nível de referência, a energia potencial da partícula quando ela se encontra na superfície da Terra (r=R) é dada por:

$$U = -\frac{G \cdot m \cdot M}{R}$$

A uma altitude h a energia potencial gravitacional do sistema será dada por:

$$U_h = -\frac{G \cdot m \cdot M}{(R+h)}$$

Logo, podemos calcular a variação de energia potencial gravitacional quando uma partícula é transportada da superfície do planeta até uma altitude **h**, que dada por:

$$\Delta U = U_h - U$$

$$\Delta U = -\frac{G \cdot m \cdot M}{(R+h)} - \left[-\frac{G \cdot m \cdot M}{R}\right]$$

$$\Delta U = G \cdot m \cdot M \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right]$$

$$\Delta U = G \cdot m \cdot M \cdot \left[\frac{R+h-R}{R \cdot (R+h)}\right]$$

$$\Delta U = \frac{G \cdot m \cdot M \cdot h}{R^2 \cdot \left(1 + \frac{h}{R}\right)}$$

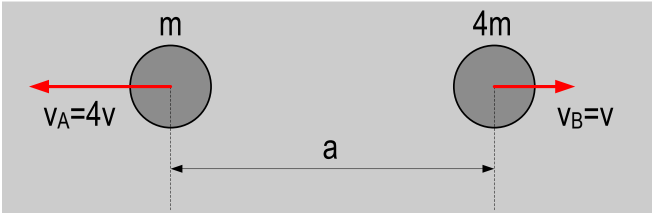
Lembrando que a aceleração da gravidade na superfície do planeta é dada por $g = \frac{G \cdot M}{R^2}$, logo:

$$\Delta U = \frac{m \cdot g \cdot h}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)}$$

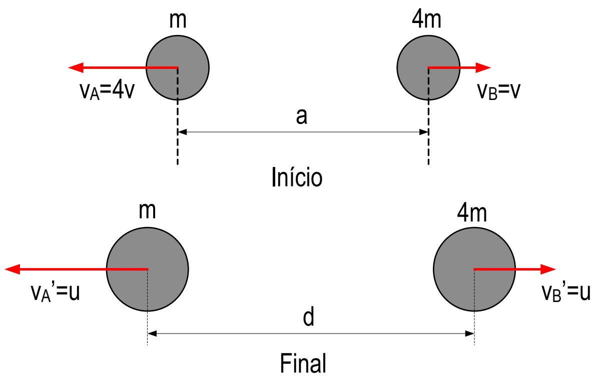
Finalmente, para pequenas altitudes temos: $\frac{h}{R} \to 0$.

Resultado: $\Delta U \cong m \cdot g \cdot h$

Exemplo resolvido: (Peruano) Considere duas partículas de massas e velocidades mostradas na figura abaixo. O professor Herbert Aquino pede que você determine a máxima separação entre as partículas considerando-se apenas a força gravitacional entre elas.



Solução:
A separação entre as partículas será máxima quando a velocidade relativa entre elas for igual à zero.



Aplicando-se o princípio de conservação do momento linear temos:

$$m(-4v)+4m\cdot(-v)=m\cdot(-u)+4\cdot m\cdot(u)$$

Logo:
$u=0$

Sendo assim a máxima separação ocorre quando ambas as esferas ficam em repouso (instantâneo) simultaneamente. Agora podemos aplicar o princípio de conservação da energia:
$E_{MA}=E_{MB}$

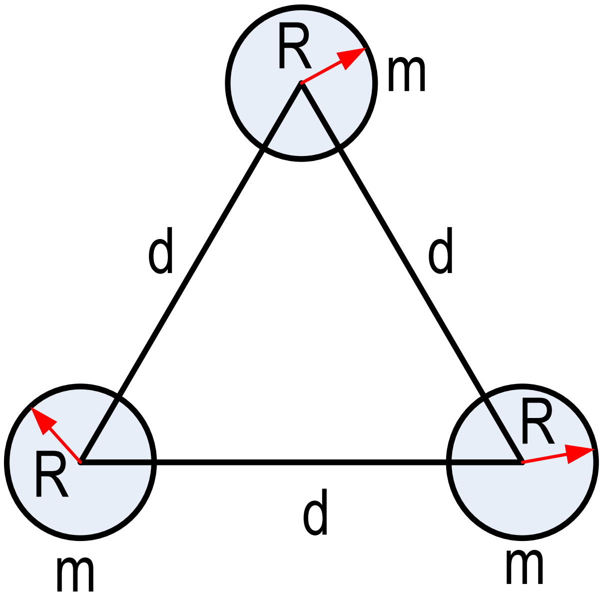
$$-\frac{G\cdot m\cdot 4m}{a}+\frac{m(4v)^2}{2}+\frac{4m\cdot v^2}{2}=-\frac{Gm\cdot 4m}{d}$$

$$\frac{-8Gm+20av^2}{2a}=-\frac{4Gm}{d}$$

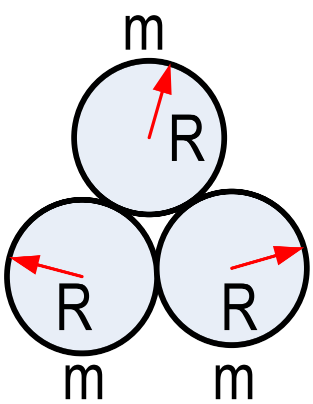
$$d=\frac{2\cdot G\cdot m\cdot a}{2\cdot G\cdot m-5\cdot a\cdot v^2}$$

O exemplo anterior é extremamente importante, pois tratamos de duas leis de conservação: conservação do momento linear e conservação da energia. **Um tipo de erro comum é aplicar equações de Movimento Uniformemente Variado em situações desse tipo.**

<u>Exemplo resolvido</u>: (New Pattern- DC Pandey)Três partículas de mesma massa **m** e raio **R** estão inicialmente em repouso nos vértices de um triângulo de lado **d.** O professor Herbert Aquino pede que determine a velocidade das partículas imediatamente antes das colisões entre elas considerando-se apenas a interação gravitacional entre as partículas.



Solução do Prof. Herbert Aquino:



Vamos aplicar o princípio de conservação da energia mecânica entre as configurações inicial e final:

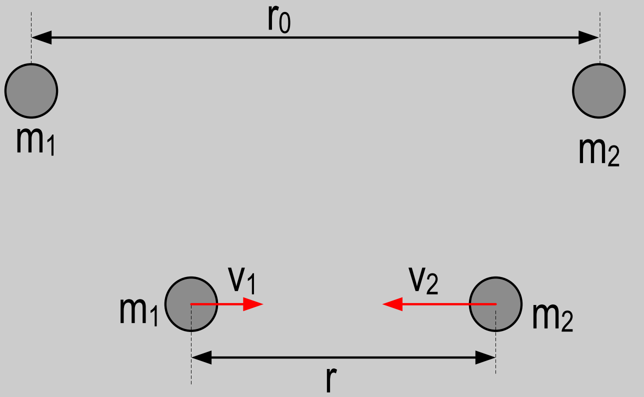
$E_{MF}=E_{MI}$

$$-\frac{3\cdot G\cdot m\cdot m}{d}=-3\cdot\frac{G\cdot m\cdot m}{2\cdot R}+3\cdot\frac{m\cdot v^2}{2}$$

$$v^2 = G \cdot m\left[\frac{1}{R} - \frac{2}{d}\right]$$

$$v = \sqrt{G \cdot m\left[\frac{1}{R} - \frac{2}{d}\right]}$$

Exemplo resolvido: (Moysés Nussenzveig) Duas partículas de massa $\mathbf{m_1}$ e $\mathbf{m_2}$ são soltas em repouso, separadas de uma distância inicial $\mathbf{r_0}$, movendo-se apenas sob o efeito de sua atração gravitacional mútua. Calcule as velocidades de duas partículas quando se aproximam até uma distância **r** $(r < r_0)$ uma da outra, conforme indica a figura abaixo.



Aplicando-se a conservação do momento linear (sistema isolado: força gravitacional é interna ao sistema de partículas), temos:

$$\vec{Q}_{ANTES} = \vec{Q}_{DEPOIS}$$

Algebricamente escrevemos:

$$0 = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot (-v_2)$$

$$m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2$$

$$v_2 = \frac{m_1 \cdot v_1}{m_2}$$

Em seguida, aplicamos a conservação da energia mecânica:

$$E_{MF} = E_{MI}$$

$$-\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r_0} = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r} + \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2}$$

$$+G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right] = \frac{1}{2} \cdot \left[m_1 \cdot v_1^2 + m_2 \cdot \left(\frac{m_1 \cdot v_1}{m_2}\right)^2\right]$$

$$+2 \cdot G \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right] = \left[m_1 \cdot v_1^2 + m_2 \cdot \left(\frac{m_1 \cdot v_1}{m_2}\right)^2\right]$$

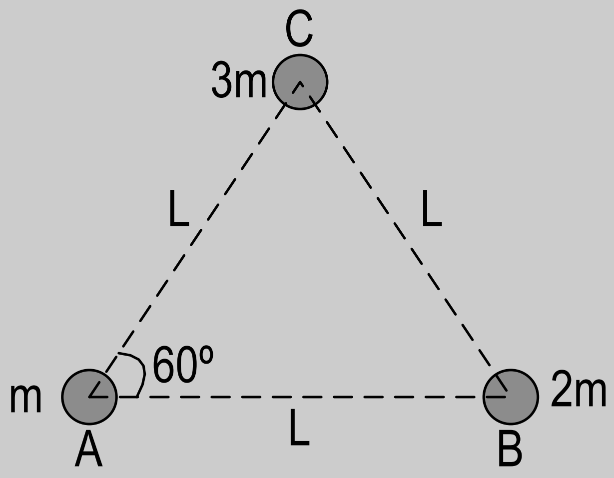
Finalmente:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot m_2^2}{(m_1 + m_2)} \cdot \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right]}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot m_1^2}{(m_1 + m_2)} \cdot \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right]}$$

Exemplo de classe: (Halliday) Duas partículas de massas m e M estão inicialmente em repouso a uma distância infinita uma da outra. Mostre que, em cada instante, a sua velocidade de aproximação relativa, devido à atração gravitacional, é $\sqrt{2 \cdot G \cdot (M + m)/d}$, onde d é a separação entre elas em cada instante.

Exemplo de classe: (Peruano) Determine a energia potencial gravitacional associada ao sistema de partículas mostrado na figura abaixo.

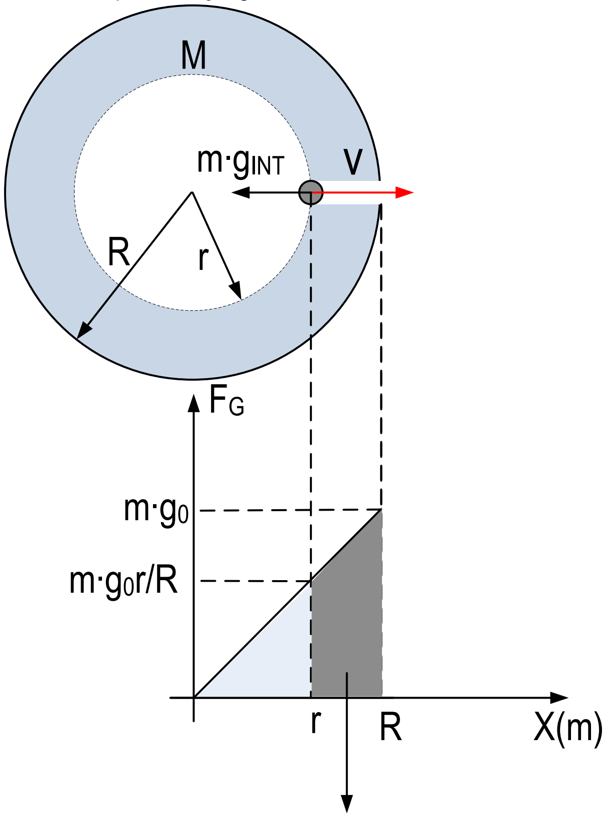


Resposta: $E_P = -\frac{11 \cdot G \cdot m^2}{L}$

Comentário para o ITA: A energia potencial de um sistema de partículas é igual ao trabalho que precisa ser realizado por um agente externo para formar o sistema, tendo como ponto de partida uma configuração de referência padrão. Se quiséssemos separar o sistema em três massas isoladas, teríamos que fornecer uma quantidade de energia igual a $E = +\frac{11 \cdot G \cdot m^2}{L}$.

E. Cálculo da energia potencial gravitacional de uma partícula (partícula-planeta) quando localizada no interior a uma distância r de seu centro.

O professor Herbert Aquino chama a atenção para o caso em que o corpo é lançado de um ponto qualquer no interior do planeta, para calcular o trabalho realizado pela força gravitacional, temos:



Módulo do trabalho realizado pela Força Gravitacional

O trabalho realizado pela força gravitacional entre um ponto no interior do planeta a uma distância r do centro e outro ponto na superfície (r=R) é dado em módulo pela área do trapézio destacada na figura acima:

$$|T_{FG}| = \frac{\left[m \cdot g_0 + m \cdot g_0 \cdot \frac{r}{R}\right] \cdot (R - r)}{2}$$

$$|T_{FG}| = \frac{m \cdot g_0 \left[1 + \frac{r}{R}\right] \cdot (R - r)}{2}$$

$$|T_{FG}| = \frac{m \cdot g_0 \cdot (R + r) \cdot (R - r)}{2 \cdot R}$$

$$|T_{FG}| = \frac{m \cdot g_0 \cdot (R^2 - r^2)}{2 \cdot R}$$

Observe que o trabalho realizado pela força gravitacional é negativo (a força gravitacional possui sentido oposto ao vetor deslocamento da partícula: trabalho resistente). Assim podemos escrever o trabalho realizado pela força gravitacional entre os pontos A e B:

$$T_{FG} = -\frac{m \cdot g_0 \cdot (R^2 - r^2)}{2 \cdot R}$$

$$T_{FG} = \frac{m \cdot g_0 \cdot (r^2 - R^2)}{2 \cdot R}$$

Lembrando que a força gravitacional é uma força conservativa (trabalho realizado pelo peso é independente da trajetória), assim podemos escrever:

$$T_{FG} = -\Delta U = -(U_F - U_I)$$

$$T_{FG} = U_I - U_F$$

$$\frac{m \cdot g_0 \cdot (r^2 - R^2)}{2 \cdot R} = U_I - U_F$$

Lembrando que energia potencial da partícula quando ela se encontra na superfície da Terra (r=R) é dada por:

$$U_F = -\frac{G \cdot m \cdot M}{R} = -m \cdot g_0 \cdot R$$

Com $g_0 = \frac{G \cdot M}{R^2}$, com isso podemos escrever:

$$\frac{m \cdot g_0 \cdot (r^2 - R^2)}{2 \cdot R} = U_I - (-m \cdot g_0 \cdot R)$$

Logo, a energia potencial gravitacional do sistema partícula-planeta para um ponto localizado no interior do planeta:

$$U_I = \frac{m \cdot g_0 \cdot (r^2 - 3R^2)}{2 \cdot R}$$

Memorize o resultado acima.

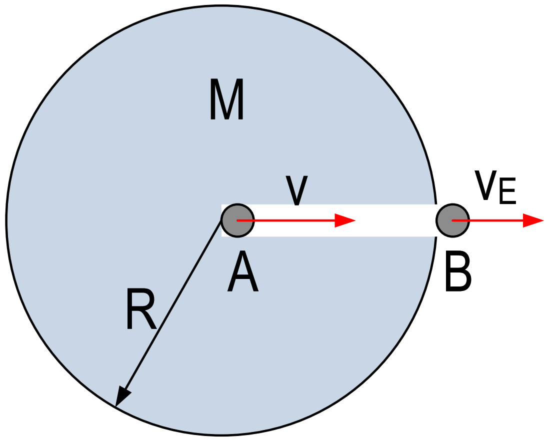
Finalmente, a energia potencial quando a partícula se encontra no centro (r=0) do planeta é dada por:

$$U_I = -\frac{3 \cdot m \cdot g_0 \cdot R}{2}$$

Exemplo resolvido: (Tipler) Um buraco é feito da superfície da Terra até seu centro, conforme indica a figura abaixo. Ignorando a rotação da Terra e resistência do ar e modelo da Terra como uma esfera de densidade uniforme, determine a velocidade de escape para uma partícula lançada do centro da Terra expressando sua resposta em função de **m, g_0 e R.**

Solução do Prof. Herbert Aquino:

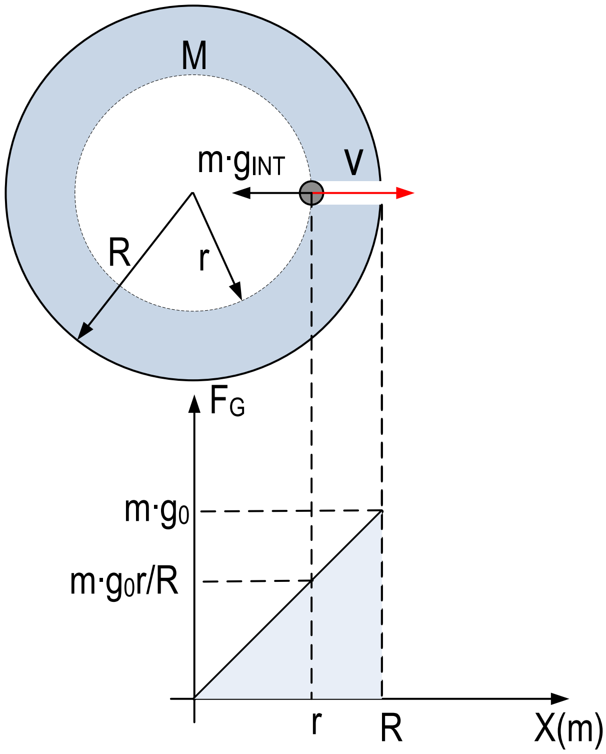
Agora iremos abordar o lançamento do corpo de um ponto no interior do planeta. Considere que fosse possível escavar um túnel até o centro da Terra conforme mostra a figura abaixo. Ignorando a rotação da Terra e resistência do ar e modelo da Terra como uma esfera de densidade uniforme, vamos determinar a velocidade mínima necessária para uma partícula lançada do centro da Terra escapar do campo gravitacional terrestre.



Para calcularmos a velocidade de lançamento do centro da Terra basta aplicarmos o Teorema Trabalho-Variação da Energia Cinética entre os pontos A e B:

$$T_{FR} = \Delta E_C$$

Sobre a partícula a única força que atua entre os pontos A e B é a força gravitacional (peso), assim construímos o gráfico abaixo.



O trabalho realizado pela força gravitacional (Peso) em módulo é igual à área do triângulo em destaque na figura acima.

$$|T_{FG}| = \frac{m \cdot g_0 \cdot R}{2}$$

Observe que o trabalho realizado pela força gravitacional é negativo (a força gravitacional possui sentido oposto ao vetor deslocamento da partícula: trabalho resistente). Assim podemos escrever o trabalho realizado pela força gravitacional entre os pontos A e B:

$$T_{FG} = -\frac{m \cdot g_0 \cdot R}{2} = T_{FR}$$

$$Ec_B - Ec_A = -\frac{m \cdot g_0 \cdot R}{2}$$

$$Ec_A = Ec_B + \frac{m \cdot g_0 \cdot R}{2}$$

$$\frac{m \cdot v_A^2}{2} = \frac{m \cdot v_B^2}{2} + \frac{m \cdot g_0 \cdot R}{2}$$

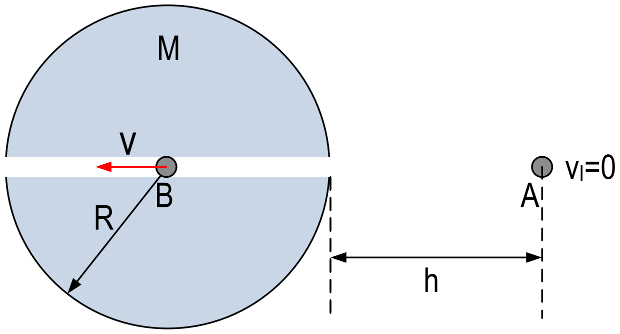
Para que o corpo escape do campo gravitacional do planeta é necessário que a velocidade em B seja igual à velocidade de escape quando o corpo é lançado da superfície do planeta ($v_B = v_E$), assim podemos escrever ($v_B^2 = 2 \cdot g_0 \cdot R$):

$$\frac{m \cdot v_A^2}{2} = \frac{m \cdot 2 \cdot g_0 \cdot R}{2} + \frac{m \cdot g_0 \cdot R}{2}$$

$$v_A = \sqrt{3 \cdot g_0 \cdot R}$$

Exemplo resolvido:(Alonso e Finn) Uma partícula de massa m é abandonada de uma altura h ($h < R$) imediatamente acima de um túnel que passa pelo centro da Terra. Considerando a Terra como uma esfera de constituição homogênea e desprezando os efeitos de rotação, o professor Herbert Aquino pede que você determine o valor da velocidade da partícula ao passar pelo centro da Terra em função de h, g_0 e R: Dado: (g_0: aceleração da gravidade na superfície da Terra e R é o raio da Terra).

Solução do Prof. Herbert Aquino:



Aplicando a conservação da energia mecânica, obtemos:

$$E_{MA} = E_{MB}$$

$$U_A + Ec_A = U_B + Ec_B$$

$$-\frac{G \cdot m \cdot M}{(R+h)} + 0 = \frac{m \cdot g_0 \cdot (r^2 - 3R^2)}{2 \cdot R} + \frac{m \cdot v^2}{2}$$

No centro da Terra temos r=0:

$$-\frac{G \cdot m \cdot M}{(R+h)} = -\frac{m \cdot g_0 \cdot 3R^2}{2 \cdot R} + \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Usando: $g_o = \frac{G \cdot M}{R^2}$ (aceleração da gravidade na superfície do planeta)

$$-\frac{m \cdot g_o \cdot R^2}{(R+h)} = -\frac{m \cdot g_0 \cdot 3R^2}{2 \cdot R} + \frac{m \cdot v^2}{2}$$

$$-\frac{g_o \cdot R^2}{(R+h)} = -\frac{g_0 \cdot 3R^2}{2 \cdot R} + \frac{v^2}{2}$$

$$-\frac{g_o \cdot R^2}{(R+h)} = -\frac{g_0 \cdot 3R}{2} + \frac{v^2}{2}$$

$$-\frac{g_o \cdot R^2}{(R+h)} = \frac{-g_0 \cdot 3R + v^2}{2}$$

$$-\frac{2 \cdot g_o \cdot R^2}{(R+h)} = -g_0 \cdot 3R + v^2$$

$$v^2 = 3 \cdot g_0 \cdot R - \frac{2 \cdot g_o \cdot R^2}{(R+h)}$$

$$v = \sqrt{g_0 \cdot R \cdot \left[\frac{R+3h}{R+h}\right]}$$

Exemplo resolvido: (Renato Brito) É sabido que a intensidade do campo gravitacional atrativo, no interior da Terra (constituição homogênea) varia linearmente com a distância ao centro do planeta, desde o valor nulo (g=0, no centro da Terra) até seu valor máximo ($g_0 = 10\,m/s^2$) na sua superfície. Admita que seja possível cavar um poço que atravesse a Terra diametralmente. Se uma pedra for abandonada na entrada desse poço, a partir do repouso, com que velocidade ela atingirá o centro do planeta?

Solução do Prof. Herbert Aquino:

Do exercício anterior temos:

$$\mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{g_0 \cdot R \cdot \left[\frac{R+3h}{R+h}\right]}}$$

Onde R é o raio da Terra e h é altura em relação a superfície da Terra.

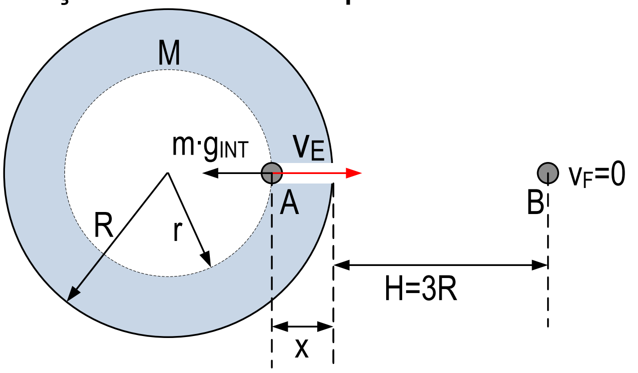
Assim, caso a partícula fosse abandonada da superfície do planeta (h=0) teríamos:

$$\mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{g_0 \cdot R}}$$

O valor da velocidade no centro do planeta nesse caso seria igual à de um satélite de órbita rasante. (Para alunos de Turma ITA lembre-se que a projeção de um Movimento Circular Uniforme é um Movimento Harmônico Simples).

Exemplo resolvido: (Solved Problems in Physics) Qual a profundidade da cratera que devemos fazer num planeta de raio R para que, lançando um projétil do fundo da mesma com a velocidade de escape do planeta, sua altura máxima alcançada seja igual a 3R?

Solução do Prof. Herbert Aquino:



Aplicando a conservação da energia mecânica, obtemos:

$E_{MA} = E_{MB}$

$$U_A + Ec_A = U_B + Ec_B$$

$$\frac{m \cdot g_0 \cdot (r^2 - 3R^2)}{2 \cdot R} + \frac{m \cdot v_E^2}{2} = -\frac{G \cdot m \cdot M}{4R}$$

Usando: $g_o = \frac{G \cdot M}{R^2}$ (aceleração da gravidade na superfície do planeta) e $v_E^2 = 2 \cdot g_0 \cdot R$(velocidade de escape do planeta).

$$\frac{m \cdot g_0 \cdot r^2}{2 \cdot R} - \frac{m \cdot g_0 \cdot 3R^2}{2 \cdot R} + \frac{m \cdot v_E^2}{2} = -\frac{m \cdot g_0 \cdot R}{4}$$

$$\frac{mg_0r^2}{2 \cdot R} - \frac{3mg_0R}{2} + \frac{2mg_0R}{2} = -\frac{mg_0R}{4}$$

$$\frac{m \cdot g_0 \cdot r^2}{2 \cdot R} = \frac{6mg_0R - 4mg_0R - mg_0R}{4}$$

$$r^2 = \frac{R^2}{2}$$

$$r = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

Logo a profundidade da cratera (x), é dada por:

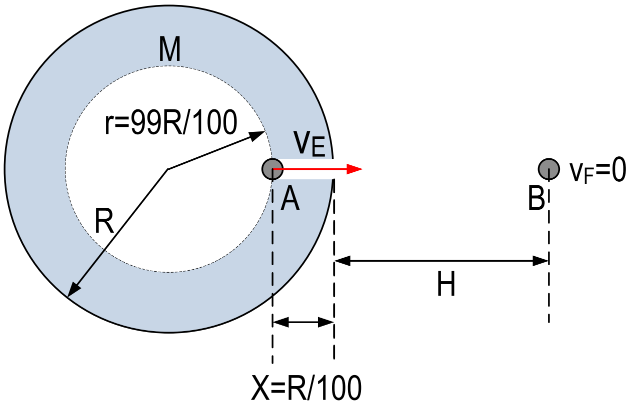
$$x = R - r = R - \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

$$x = R \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$x = R \cdot \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right)$$

Exemplo resolvido: (ITA-2005-Modificada) Suponha que na Lua, cujo raio e R, exista uma cratera de profundidade R/100, do fundo da qual um projetil é lançado verticalmente para cima com velocidade inicial v igual à velocidade de escape da superfície da Lua. Determine literalmente a altura máxima alcançada pelo projetil.

Solução do Prof. Herbert Aquino:



Aplicando a conservação da energia mecânica, obtemos:

$E_{MA} = E_{MB}$

$U_A + Ec_A = U_B + Ec_B$

$$\frac{m \cdot g_0 \cdot (r^2 - 3R^2)}{2 \cdot R} + \frac{m \cdot v_E^2}{2} = -\frac{G \cdot m \cdot M}{(R+H)}$$

$$\frac{m \cdot g_0}{2R} \cdot \left[\left(\frac{99R}{100}\right)^2 - 3R^2\right] + \frac{m \cdot v_E^2}{2} = -\frac{G \cdot m \cdot M}{(R+H)}$$

Usando: $g_o \cdot R^2 = G \cdot M$ (aceleração da gravidade na superfície do planeta) e $v_E^2 = 2 \cdot g_0 \cdot R$(velocidade de escape do planeta).

$$\frac{mg_0}{2R}\left[\frac{-20199 \cdot R^2}{10000}\right] + \frac{2mg_0R}{2} = -\frac{mg_o \cdot R^2}{(R+H)}$$

$$-\frac{199}{20000} = \frac{R}{R+H}$$

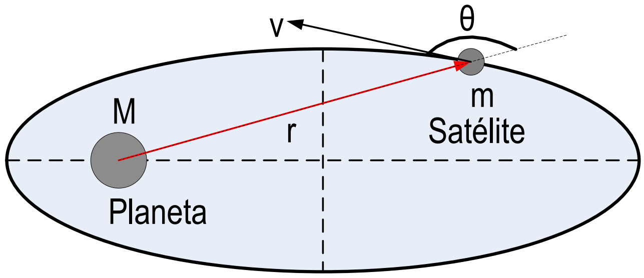
$$H = \frac{19801R}{199}$$

$$H = 99{,}5R$$

Comentário: Esta questão está no livro do D.C. Gupta e esteve na prova do IIT.JEE.

F. Momento angular na prova do ITA:

Recentemente muitos problemas de Gravitação Universal na prova do ITA, para serem resolvidos necessitam da aplicação de duas leis de conservação, são elas: conservação da energia mecânica e conservação do momento angular. Este complemento tem por finalidade deixar você estudante acostumado com estas ferramentas.



Conservação do momento angular:

$m \cdot v \cdot r \cdot \text{sen}\theta = \text{constante}$

Justificativa rápida: A força gravitacional é uma força central, logo torque resultante em relação a qualquer ponto ao longo de sua linha de ação é nulo. Portanto, para movimentos de satélites em torno de planetas (ou de planetas em torno e estrelas), o momento angular não se altera (permanece constante).

Para as posições do afélio e periélio, temos θ=90º:

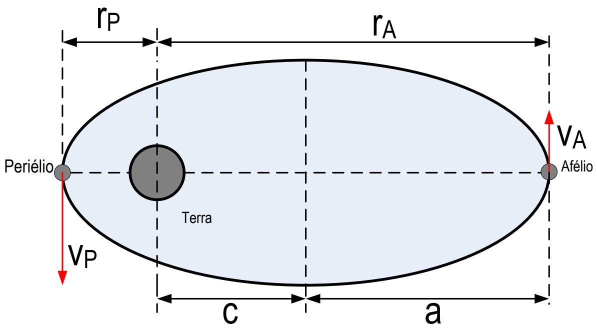
$m \cdot v \cdot r = \text{constante}$

Conservação da energia:

$$\frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{GmM}{r} = \text{constante}$$

Justificativa rápida: A energia mecânica se conserva, pois a força gravitacional é conservativa.

Dica ITA: Satélite descrevendo órbita elíptica: em torno da Terra.



Considere um satélite de massa **m** descrevendo uma órbita elíptica de excentricidade (**e**) em torno da Terra de massa M. O semi-eixo maior da elipse é **a**.

Determinando a distância $\mathbf{r_A}$ e $\mathbf{r_P}$ da figura acima:

$$e = \frac{c}{a}$$

Logo: $c = e \cdot a$

Assim temos:

$$r_A = a - c = a \cdot (1 - e)$$

$$r_p = a + c = a \cdot (1 + e)$$

Usando a conservação do momento angular, obtemos:

$$m \cdot v_p \cdot r_p = m \cdot v_A \cdot r_A$$

$$v_p = \frac{v_A \cdot r_A}{r_p}$$

Aplicando a conservação da energia mecânica:

$$-\frac{GmM}{r_p} + \frac{mv_p^2}{2} = -\frac{GmM}{r_A} + \frac{mv_A^2}{2}$$

$$v_p^2 - v_A^2 = 2GM\left[\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_A}\right]$$

$$\left(\frac{v_A r_A}{r_p}\right)^2 - v_A^2 = 2GM\left[\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_A}\right]$$

$$v_A^2 \cdot \left(\frac{r_A^2 - r_p^2}{r_p^2}\right) = 2GM\left[\frac{r_A - r_p}{r_p r_A}\right]$$

Finalmente, obtemos:

$$v_A^2 = \frac{2GMr_p}{r_A \cdot (r_A + r_p)}$$

$$v_A^2 = \frac{2GMa \cdot (1 + e)}{a + ea \cdot (a + ea + a - ea)}$$

Velocidade no afélio:

$$v_A = \sqrt{\frac{GM}{a} \cdot \left[\frac{1 - e}{1 + e}\right]}$$

Velocidade no periélio:

$$v_p = \sqrt{\frac{GM}{a} \cdot \left[\frac{1 + e}{1 - e}\right]}$$

Razão entre as velocidades no afélio e no periélio:

$$\frac{v_A}{v_p} = \left[\frac{1 - e}{1 + e}\right]$$

<u>**Comentário**</u>: O resultado acima mostra que se a distância entre o planeta e o satélite diminui a energia potencial diminui e a energia cinética do satélite aumenta, assim a velocidade no afélio será menor que no periélio.

<u>**Exemplo resolvido**</u>: O professor Herbert Aquino pede que você calcule a energia total (de um satélite de massa **m** girando ao redor de um planeta de massa **M**), no caso de movimento elíptico, relacionando ao semi-eixo maior **a** da elipse descrita e a excentricidade **e** da elipse.

<u>**Solução do Prof. Herbert Aquino**</u>:

Agora determinaremos a energia mecânica total do sistema Satélite-Terra:

$$E_M = \frac{mv_p^2}{2} - \frac{GmM}{r_p}$$

$$E_M = \frac{1}{2}\left[\frac{GM}{a} \cdot \left(\frac{1 + e}{1 - e}\right)\right] - \frac{GMm}{a \cdot (1 - e)}$$

$$E_M = \frac{GmM}{a(1 - e)} \cdot \left[\left(\frac{1 + e}{2}\right) - 1\right]$$

$$E_M = \frac{GmM}{a(1 - e)} \cdot \left(\frac{e - 1}{2}\right)$$

$$E_M = -\frac{GmM}{2a}$$

Comentário: Este resultado confirma o fato de que a energia total é negativa e depende apenas do semi-eixo maior **a** da elipse. Assim, para todas as órbitas elípticas que tenham o mesmo semi-eixo maior terão a mesma energia total, embora tenham diferentes excentricidades.

Exemplo resolvido: O professor Herbert Aquino pede que você calcule momento angular (de um satélite de massa **m** girando ao redor de um planeta de massa **M**), no caso de movimento elíptico, relacionando ao semi-eixo maior **a** da elipse descrita e a excentricidade **e** da elipse

Solução do Prof. Herbert Aquino:

Cálculo do momento angular total do sistema:

$$L = m \cdot v_p \cdot r_p = m\sqrt{\frac{2GMr_pr_A}{(r_p + r_A)}}$$

$$L = m \cdot \sqrt{\frac{2GMa^2(1-e^2)}{2a}}$$

$$L = m \cdot \sqrt{GMa(1-e^2)}$$

Exemplo resolvido: O professor Herbert Aquino pede que você determine a excentricidade **e** da órbita elíptica (de um satélite de massa **m** girando ao redor de um planeta de massa **M**) em função da energia mecânica do sistema **E** e do momento angular do sistema **L**.

Solução do Prof. Herbert Aquino:

A energia mecânica total do sistema Satélite-Terra:

$$E_M = -\frac{GmM}{2a}$$

De onde vem:

$$G \cdot m \cdot M = -2 \cdot E \cdot a$$

O momento angular total do sistema:

$$L = m \cdot \sqrt{GMa(1-e^2)}$$

$$L^2 = m^2 \cdot GMa(1-e^2)$$

$$L^2 = m \cdot (GMm) \cdot a \cdot (1-e^2)$$

$$L^2 = m \cdot (-2 \cdot E \cdot a) \cdot a \cdot (1-e^2)$$

$$-\frac{L^2}{2 \cdot E \cdot m \cdot a^2} = 1 - e^2$$

$$e^2 = 1 + \frac{L^2}{2 \cdot E \cdot m \cdot a^2}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{L^2}{2 \cdot E \cdot m \cdot a^2}}$$

Comentário do professor Herbert Aquino: para a circunferência temos que a excentricidade (**e**) é nula. De onde podemos escrever:

$$L^2 = 2 \cdot E \cdot m \cdot a^2$$

$$L = \sqrt{2 \cdot E \cdot m \cdot a^2}$$

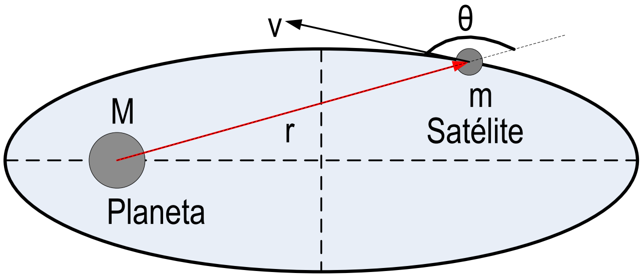
Este comentário é baseado em um exercício do livro indiano Physics Challenger (Autor: Er. Deepak Agarwal)

Em resumo: Podemos dizer que o tamanho da órbita(dada pelo semieixo maior) é determinada pela energia, e que, para uma dada energia, a "forma" da órbita (dada pela excentricidade) é determinada pelo momento angular(Alonso e Finn).

Exemplo resolvido: Usando a conservação da energia no movimento planetário mostre que a velocidade v de um objeto numa órbita elíptica satisfaz à relação:

$$v^2 = G \cdot M \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

Solução do Prof. Herbert Aquino:



Como já demonstramos anteriormente, energia mecânica total do sistema Satélite-Terra é dada por:

$$E = -\frac{GmM}{2a}$$

$$G \cdot m \cdot M = -2 \cdot E \cdot a$$

Aplicando a conservação da energia mecânica:

$$E_M = -\frac{GmM}{2a} = \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{GmM}{r}$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{G \cdot M}{r} - \frac{G \cdot M}{2 \cdot a}$$

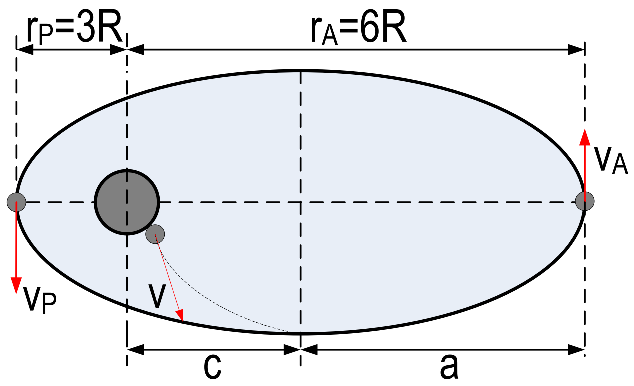
$$v^2 = 2 \cdot G \cdot M \cdot \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right]$$

Finalmente:

$$v^2 = G \cdot M \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

Exemplo resolvido: Um satélite é lançado da superfície de um planeta sem atmosfera de raio R, de modo a entrar em órbita elíptica, com distâncias do apogeu à superfície do planeta de 5R e do perigeu à superfície do planeta de 2R. O professor Herbert Aquino pede que você calcule a velocidade de lançamento, sabendo que g é a aceleração da gravidade na superfície do planeta.

Solução do Prof. Herbert Aquino:



Aplicando a conservação do momento angular, temos:

$$m \cdot v_p \cdot r_p = m \cdot v_A \cdot r_A$$

$$v_p = 2v_A$$

Aplicando a conservação da energia mecânica, obtemos:

$$E_{MA} = E_{MP}$$

$$-\frac{GmM}{r_p} + \frac{mv_p^2}{2} = -\frac{GmM}{r_A} + \frac{mv_A^2}{2}$$

$$-\frac{GmM}{3R} + \frac{mv_p^2}{2} = -\frac{GmM}{6R} + \frac{mv_A^2}{2}$$

$$-\frac{GmM}{3R} + \frac{m(2v_A)^2}{2} = -\frac{GmM}{6R} + \frac{mv_A^2}{2}$$

$$\frac{3 \cdot v_A^2}{2} = \frac{GM}{6R}$$

$$v_A^2 = \frac{GM}{9R}$$

Aplicando-se novamente a conservação da energia entre um ponto na superfície do planeta e o afélio, temos:

$$E_{MA} = E_M$$

$$-\frac{GmM}{R} + \frac{mv^2}{2} = -\frac{GmM}{r_A} + \frac{mv_A^2}{2}$$

$$-\frac{GmM}{R} + \frac{mv^2}{2} = -\frac{GmM}{6R} + \frac{mv_A^2}{2}$$

$$-\frac{GmM}{R} + \frac{mv^2}{2} = -\frac{GmM}{6R} + \frac{m}{2} \cdot \left(\frac{GM}{9R}\right)$$

$$\frac{v^2}{2}=\frac{GM}{R}\cdot\left(1+\frac{1}{18}-\frac{1}{6}\right)$$

$$v^2=\frac{16}{9}\cdot\frac{GM}{R}$$

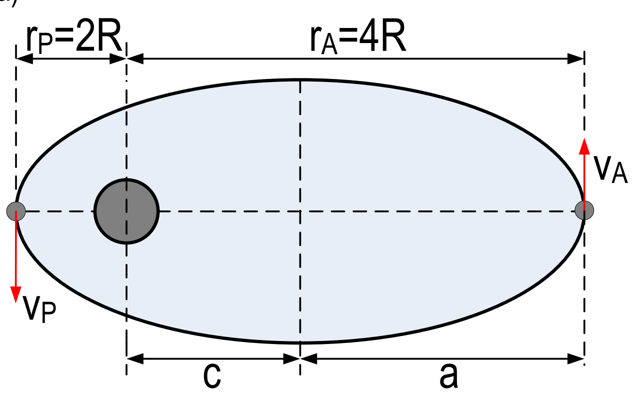
Lembrando: $g=\frac{G\cdot M}{R^2}$, (aceleração da gravidade na superfície do planeta).

Finalmente:

$$v=\frac{4}{3}\cdot\sqrt{g\cdot R}$$

Exemplo resolvido: (D.C. Pandey) A máxima e a mínima distância de um satélite a Terra são respectivamente, iguais a 2R e 4R. Considerado a massa da Terra igual a M e o seu raio igual a R. O professor Herbert Aquino pede que você determine:
a) A velocidade mínima e a velocidade máxima;
b) O raio de curvatura no ponto em que a distância ao planeta é mínima;

Solução do Prof. Herbert Aquino:
a)



Aplicando a conservação do momento angular, temos:

$$m\cdot v_p\cdot r_p=m\cdot v_A\cdot r_A$$

$$v_p=2v_A$$

Aplicando a conservação da energia mecânica, obtemos:

$$E_{MA}=E_{MP}$$

$$-\frac{GmM}{r_p}+\frac{mv_p^2}{2}=-\frac{GmM}{r_A}+\frac{mv_A^2}{2}$$

$$-\frac{GmM}{2R}+\frac{mv_p^2}{2}=-\frac{GmM}{4R}+\frac{mv_A^2}{2}$$

$$-\frac{GmM}{2R}+\frac{m(2v_A)^2}{2}=-\frac{GmM}{4R}+\frac{mv_A^2}{2}$$

De onde obtemos:
Velocidade no afélio:

$$v_A=\sqrt{\frac{GM}{6R}}$$

Velocidade no periélio:

$$v_p=\sqrt{\frac{2GM}{3R}}$$

b) Para calcularmos o raio de curvatura no periélio, basta perceber que a força gravitacional atua nesse ponto como uma força resultante centrípeta. Logo:

$$F_G=F_{CP}$$

$$\frac{m\cdot v_p^2}{r}=\frac{GmM}{(2r)^2}$$

$$r=\frac{4\cdot v_p^2\cdot R^2}{GM}$$

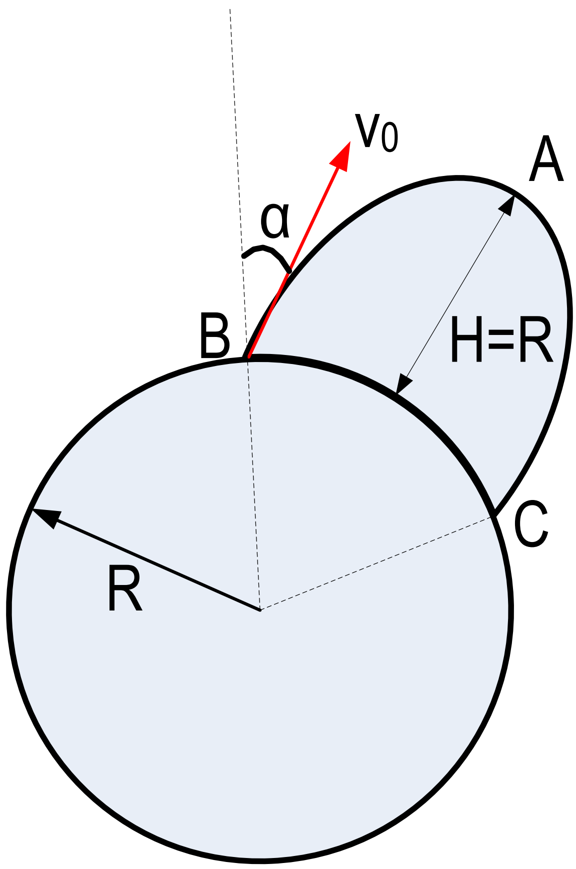
Lembre:

$$v_p^2=\frac{2GM}{3R}$$

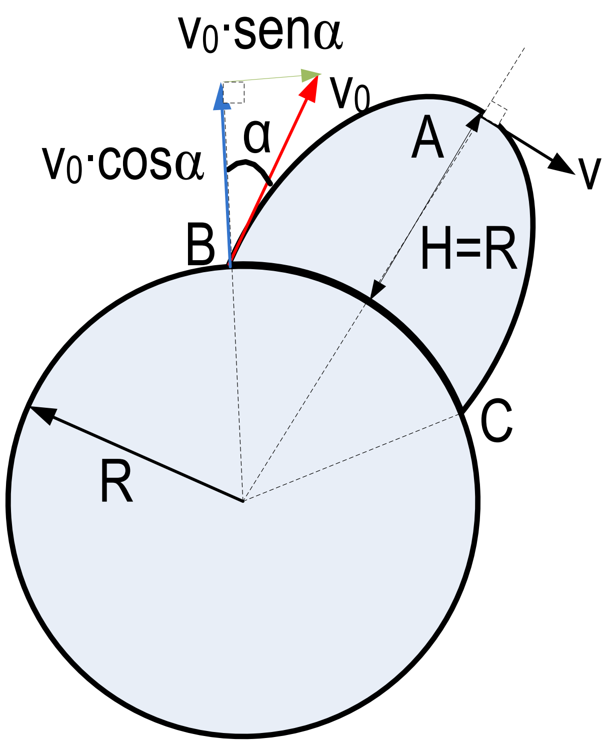
De onde resulta:

$$r=\frac{8R}{3}$$

Exemplo resolvido: (Solved Problems in Physics) Um míssil é disparado do solo com velocidade inicial v_0, formando um ângulo α com a vertical como mostra a figura abaixo. Se o míssil deve atingir uma altitude máxima igual ao raio da Terra, o professor Herbert Aquino pede que você demonstre que o ângulo necessário α é definido pela relação $\operatorname{sen}\alpha=2\cdot\sqrt{1-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{v_E}{v_0}\right)^2}$, onde v_E é a velocidade de escape.



Solução do Prof. Herbert Aquino:



Aplicando a conservação do momento angular, temos:

$$m \cdot v_B \cdot r_B \cdot sen\alpha = m \cdot v_A \cdot r_A \cdot sen\beta$$

$$m \cdot v_0 \cdot R \cdot sen\alpha = m \cdot v \cdot 2R \cdot sen90^0$$

$$v = \frac{v_0 \cdot sen\alpha}{2}$$

Aplicando a conservação da energia mecânica, obtemos:

$$E_{MA} = E_{MB}$$

$$-\frac{GmM}{r_B} + \frac{mv_B^2}{2} = -\frac{GmM}{r_A} + \frac{mv_A^2}{2}$$

$$-\frac{GmM}{R} + \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{GmM}{2R} + \frac{mv^2}{2}$$

$$\frac{GmM \cdot (1-2)}{2 \cdot R} + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$$

$$-\frac{GmM}{2 \cdot R} + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$$

$$-\frac{GM}{R} + v_0^2 = v^2$$

Lembrando-se da velocidade de escape:

$$v_E = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}}$$

$$v_E^2 = \frac{2 \cdot G \cdot M}{R}$$

$$\frac{v_E^2}{2} = \frac{G \cdot M}{R}$$

Retornando a equação de conservação da energia, temos:

$$-\frac{GM}{R} + v_0^2 = v^2$$

$$-\frac{v_E^2}{2} + v_0^2 = v^2$$

Retomando a equação obtida com a conservação do momento angular:

$$-\frac{v_E^2}{2}+v_0^2=\left(\frac{v_0\cdot sen\alpha}{2}\right)^2$$
$$-\frac{v_E^2}{2}+v_0^2=\frac{v_0^2\cdot sen^2\alpha}{4}$$

Dividindo ambos os membros da equação por v_0^2:

$$\frac{sen^2\alpha}{4}=1-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{v_E}{v_0}\right)^2$$

Finalmente:

$$sen\alpha = 2\cdot\sqrt{1-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{v_E}{v_0}\right)^2}$$

Exemplo de classe: (Problem Book- D.C. Pandey) Um corpo é lançado da superfície da Terra formando um ângulo α=30º com a horizontal com uma velocidade $v_0=\sqrt{\frac{1{,}5\cdot G\cdot M}{R}}$. Considere a Terra uma esfera homogênea de raio R e massa M. Desprezando a resistência do ar e a rotação da Terra, o professor Herbert Aquino pede que você determine a altura máxima atingida pelo corpo em relação a superfície da Terra.

Resposta: h=2,33R(valor aproximado)

Exemplo de classe: (ITA-13) Uma lua de massa *m* de um planeta distante, de massa $M \gg m$ descreve uma órbita elíptica com semieixo maior *a* e semieixo menor *b*, perfazendo um sistema de energia E. A lei das áreas de Kepler relaciona a velocidade *v* da lua no apogeu com sua velocidade *v'* no perigeu, isto é, $v'(a-e)=v(a+e)$, em que *e* é a medida do centro ao foco da elipse. Nessas condições, podemos afirmar que

a) $E=-\frac{GMm}{(2a)}$.

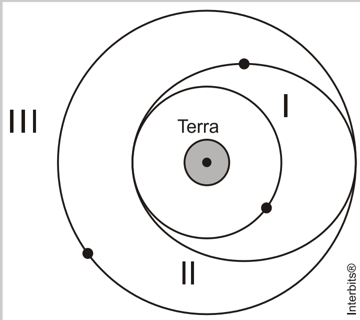
b) $E=-\frac{GMm}{(2b)}$.

c) $E=-\frac{GMm}{(2e)}$.

d) $E=-\frac{GMm}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

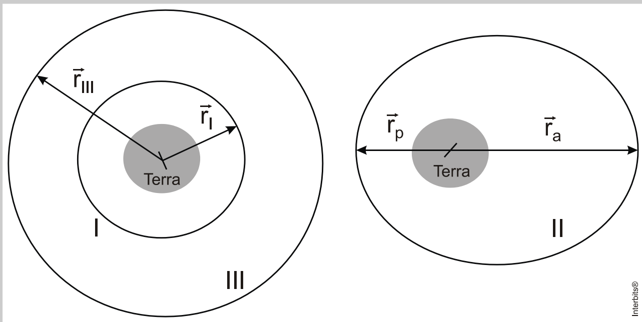
e) $v'=\sqrt{\frac{2GM}{(a-e)}}$.

Exemplo de classe: (ITA-12) O momento angular é uma grandeza importante na Física. O seu módulo é definido como $L=rpsen\theta$, em que r é o módulo do vetor posição com relação à origem de um dado sistema de referência, p o módulo do vetor quantidade de movimento e θ o ângulo por eles formado. Em particular, no caso de um satélite girando ao redor da Terra, em órbita elíptica ou circular, seu momento angular (medido em relação ao centro da Terra) é conservado. Considere, então, três satélites de mesma massa com órbitas diferentes entre si, I, II e III, sendo I e III circulares e II elíptica e tangencial a I e III, como mostra a figura. Sendo $\mathbf{L_I}$, $\mathbf{L_{II}}$ e $\mathbf{L_{III}}$ os respectivos módulos do momento angular dos satélites em suas órbitas, ordene, de forma crescente, $\mathbf{L_I}$, $\mathbf{L_{II}}$ e $\mathbf{L_{III}}$. Justifique com equações a sua resposta.



Resolução retirada do site www.sprweb.com.br:

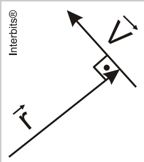
O enunciado nos informa a existência de duas órbitas circulares (I e III) e uma elíptica (II), conforme figura abaixo:



Sendo $\vec{r}_I$ e $\vec{r}_{III}$ os vetores posição das órbitas circulares I e III, respectivamente, e, $\vec{r}_a$ e $\vec{r}_p$, os vetores posição do afélio e do periélio, respectivamente, da órbita elíptica II, observamos que: $r_I = r_p$ e $r_{III} = r_a$.

O exercício trata do momento angular $L = rpsen\theta$, onde $p = m.v$, sendo m a massa do satélite que está girando ao redor da Terra e v a intensidade de sua velocidade.

$L = rpsen\theta \to L = rmvsen\theta$

Como $\theta = 90°$  $sen\theta = 1$

$L = rmvsen\theta \to L = r.m.v$

$L = r.m.v$ **(eq.1)**

Dos estudos de gravitação, temos que:

– Para órbitas circulares

$$V = \sqrt{\frac{G.M}{r}}$$

Substituindo na eq.1, teremos:

$$L_I = r_I.m.\sqrt{\frac{G.M}{r_I}}$$

$$L_{III} = r_{III}.m.\sqrt{\frac{G.M}{r_{III}}}$$

– Para órbitas elípticas

$V_p = \sqrt{\dfrac{2.G.M.r_a}{r_p.(r_a + r_p)}}$ sendo V_p a intensidade da velocidade do satélite no periélio;

$V_a = \sqrt{\dfrac{2.G.M.r_p}{r_a.(r_a + r_p)}}$ sendo V_a a intensidade da velocidade do satélite no afélio.

Como o momento angular do satélite girando ao redor da Terra e conservado, podemos utilizar V_a ou V_p.

Considerando V_p e substituindo na eq.1, teremos:

$$L_{II} = r_p.m.\sqrt{\frac{2.G.M.r_a}{r_p.(r_a + r_p)}}$$

Como $r_I = r_p$ e $r_{III} = r_a$:

$$L_{II} = r_p.m.\sqrt{\frac{2.G.M.r_a}{r_p.(r_a + r_p)}} \to L_{II} = r_I.m.\sqrt{\frac{2.G.M.r_{III}}{r_I.(r_{III} + r_I)}}$$

Conclusão

$$L_I = r_I.m.\sqrt{\frac{G.M}{r_I}}$$

$$L_{II} = r_I.m.\sqrt{\frac{2.G.M.r_{III}}{r_I.(r_{III} + r_I)}}$$

$$L_{III} = r_{III}.m.\sqrt{\frac{G.M}{r_{III}}}$$

Como $r_I.m$ é constante para L_I e L_{II}, e $\sqrt{\dfrac{2.G.M.r_{III}}{r_I.(r_{III} + r_I)}} > \sqrt{\dfrac{G.M}{r_I}} \therefore L_{II} > L_I$.

Como $r_{III} > r_I \therefore L_{III} > L_{II}$

Exercícios de Treinamento

1. (IME-74) Um astronauta equipado, utilizando o esforço máximo, salta 0,60m de altura na superfície terrestre. Calcular o quanto saltaria na superfície lunar, nas mesmas condições. Considerar o diâmetro e a densidade da lua como $1/4$ e $2/3$ dos da Terra, respectivamente.

Resposta: h=3,6m.

2. (IME-81) Um planeta hipotético, esférico e de massa homogênea, com massa específica de 2500 kg/m^3 e de raio 10000 km, completa seu movimento de rotação de 16 horas e 40 minutos. Calcular a que altura deve ser colocado um satélite artificial para que mantenha, enquanto em órbita, distâncias constantes em relação a estações de rastreamento fixas na superfície do planeta. Considerar: $\pi = 3$ e $G = 6{,}4 \cdot 10^{-11}\ m^3/kg \cdot s^2$.

Resposta: h=30000 km.

3. (IME-85) Na superfície de um planeta hipotético, de raio igual ao da Terra, um pêndulo simples oscila com período de 2,0 s. Sabendo, que, na própria Terra, o período de oscilação do mesmo pêndulo vale $\sqrt{2}$ s, determine a razão entre as massas do planeta e da Terra.

Resposta: $1/2$.

4. (IME-88) Um astronauta em traje especial e completamente equipado pode dar pulos verticais de 0,5m na Terra. Determine a altura máxima que o astronauta poderá pular em um outro planeta, sabendo-se que o seu diâmetro é um quarto do da Terra e sua massa específica dois terços da terrestre. Considere que o astronauta salte em ambos os planetas com a mesma velocidade inicial.

Resposta: 3 m

5. (ITA-65) Admitindo-se que a aceleração da gravidade seja $g = 9{,}81\,m/s^2$ ao nível do mar, pode-se dizer que, a uma altitude igual ao raio da Terra acima do nível do mar (nível do mar entende-se como nível médio do mar), a aceleração da gravidade vale aproximadamente:
a) $2{,}45\,m/s^2$
b) $4{,}90\,m/s^2$
c) $9{,}81\,m/s^2$
d) $19{,}62\,m/s^2$
e) $9{,}62\,m/s^2$

Resposta: A

6. (ITA-71) A aceleração da gravidade a $3{,}6 \cdot 10^4$ km acima da superfície terrestre (o raio da Terra é igual a $6{,}40 \cdot 10^3$ km) vale aproximadamente:
a) $2{,}23 \cdot 10^{-1}\ m/s^2$
b) $1{,}48\,m/s^2$
c) $9{,}82\,m/s^2$
d) $1{,}00\,m/s^2$
e) Nenhuma das respostas acima é válida;

Resposta: A

7. (ITA-71) Considerando os dados e o resultado da questão anterior verifique que o período de revolução de um satélite artificial colocado em órbita circular da Terra naquela altitude é de aproximadamente:
a) 90 min;
b) 90 s;
c) 22 h;
d) 24 h;
e) 12h.

Resposta: D

8. (ITA-74) A energia potencial de um corpo de massa m na superfície da Terra é $-G \cdot M_T \cdot m/R_T$. No infinito essa energia potencial é nula. Considerando-se o princípio de conservação da energia (cinética+ potencial), que velocidade deve ser dada a esse corpo de massa m (velocidade de escape) para que ele se livre da atração da Terra, isto é, chegando ao infinito com v=0?
Dados:
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$;
$M_T = 6{,}0 \cdot 10^{24} kg$;
$R_T = 6{,}0 \cdot 10^6 m$;
Despreze o atrito com a atmosfera.
a) $13{,}1\,m/s$;
b) $1{,}13 \cdot 10^3\ m/s$;
c) $11{,}3\ km/s$;
d) $113\,km/s$;
e) Depende do ângulo de lançamento.

Resposta: C

9. (ITA-87) A respeito da Lei da Gravitação Universal podemos afirmar que:
a) exprime-se pela fórmula P=mg.
b) pode ser deduzida das Leis de Kepler do movimento planetário.
c) evidencia a esfericidade da Terra.
d) implica em que todos os movimentos planetários sejam circulares.
e) é compatível com as Leis de Kepler do movimento planetário.

10. (ITA-89) Um astronauta faz experiências dentro do seu satélite esférico, que está em órbita ao redor da Terra. Colocando com cuidado um objeto de massa m_0 bem no centro do satélite o astronauta observa que o objeto mantém sua posição ao longo do tempo. Baseado na 2ª Lei de Newton, um observador no "Sol" tenta explicar esse fato com as hipóteses abaixo. Qual delas é correta?
a) Não existem forças atuando sobre o objeto (o próprio astronauta sente-se imponderável).
b) Se a força de gravitação da Terra $F_g = \frac{G \cdot M_T \cdot m_0}{r^2}$ está atuando sobre o objeto e este fica imóvel é porque existe uma força centrífuga oposta que a equilibra.
c) A carcaça do satélite serve de blindagem contra qualquer força externa.

d) As forças aplicadas pelo Sol e pela Lua equilibram a atração da Terra.
e) A força que age sobre o satélite é a da gravitação, mas a velocidade tangencial **v** do satélite deve ser tal que $\frac{m_0 \cdot v^2}{r} = \frac{G \cdot M_T \cdot m_0}{r^2}$.

Resposta: E

11. (ITA-60) Um pêndulo simples colocado num satélite artificial comum, já em órbita:
a) oscila com período igual ao que possui na Terra.
b) não oscila e sim permanece parado em relação ao satélite.
c) oscila com período maior que o que possui na Terra.
d) oscila com período menor que o que possui na Terra.
e) n.d.a.

Resposta: B

12. (ITA-81) Um satélite artificial de dimensões desprezíveis gira em torno da Terra em órbita circular de raio **R**. Sua massa é **m** e a da Terra é **M** $(M \gg m)$. Considerando a Terra como uma esfera homogênea e indicando a constante de gravitação universal por **G**, podemos afirmar que:
a) a aceleração normal do satélite é dirigida para o centro da Terra e sua aceleração tangencial vale $G \cdot M \cdot R^{-2}$.

b) se a atração gravitacional pudesse ser substituída pela ação de um cabo de massa desprezível, ligando o satélite ao centro da Terra a tensão nesse cabo seria dada por $\frac{G \cdot m \cdot M}{2 \cdot R^2}$.

c) o período de rotação do satélite é $2\pi \cdot \sqrt{\frac{R^3}{G \cdot M}}$.
d) em relação ao satélite, a Terra percorre uma circunferência de raio $\frac{M \cdot R}{r}$.
e) a Terra é atraída pelo satélite com uma força de intensidade $\frac{m}{M}$ vezes menor que a força com a qual o satélite é atraído pela Terra.

Resposta: C

13. (ITA-86) Se colocarmos um satélite artificial de massa m girando ao redor de Marte $(6{,}37 \cdot 10^{23}\,\text{kg})$ numa órbita circular, a relação entre a sua energia cinética **T** e a energia potencial gravitacional **U** será:
a) $T = \frac{U}{2}$
b) $T = 2U$
c) $T = \frac{U}{2m}$
d) $T = mU$
e) $T = U$

Resposta: A

14. (ITA-80) Um foguete lançado verticalmente, da superfície da Terra, atinge uma altitude máxima igual a três vezes o raio R da Terra. Calcular a velocidade inicial do foguete. Considere M é a massa da Terra e G constante gravitacional.

a) $v = \sqrt{\frac{3GM}{2 \cdot R}}$
b) $v = \sqrt{\frac{4GM}{3 \cdot R}}$
c) $v = \sqrt{\frac{2GM}{3 \cdot R}}$
d) $v = \sqrt{\frac{3GM}{4 \cdot R}}$
e) $v = \sqrt{\frac{3GM}{4 \cdot R}}$

Resposta: A

15. (ITA-88) Duas estrelas de massa **m** e **2m** respectivamente, separadas por uma distância **d** e bastante afastadas de qualquer outra massa considerável, executam movimentos circulares em torno do centro de massa comum. Nestas condições, o tempo **T** para uma revolução completa, a velocidade **v(2m)** da estrela maior, bem como a energia mínima **W** para separar completamente as duas estrelas são:

	T	V(2m)	W
a)	$2\pi d\sqrt{\frac{d}{3Gm}}$	$\sqrt{\frac{Gm}{3d}}$	$\frac{2Gm^2}{d}$
b)	$2\pi d\sqrt{\frac{Gm}{3d}}$	$2 \cdot \sqrt{\frac{Gm}{3d}}$	$-\frac{Gm^2}{d}$

c)	$2\pi d\sqrt{\frac{3d}{Gm}}$	$\sqrt{\frac{Gm}{3d}}$	$+\frac{Gm^2}{d}$
d)	$\pi d\sqrt{\frac{3d}{Gm}}$	$2\cdot\sqrt{\frac{Gm}{3d}}$	$-\frac{Gm^2}{d}$
e)	$2\pi d\sqrt{\frac{d}{3Gm}}$	$\sqrt{\frac{Gm}{3d}}$	$+\frac{Gm^2}{d}$

Resposta: E

16. (ITA - 91) Considere um planeta cuja massa é o triplo da massa da Terra e seu raio, o dobro do raio da Terra. Determine a relação entre a velocidade de escape deste planeta e a da Terra (**v_P/v_T**) e a relação entre a aceleração gravitacional na superfície do planeta e da Terra (**g_P/g_T**).

a) $\frac{v_P}{v_T}=\sqrt{\frac{3}{4}}$ e $\frac{g_P}{g_T}=\frac{3}{4}$

b) $\frac{v_P}{v_T}=\sqrt{\frac{3}{2}}$ e $\frac{g_P}{g_T}=\frac{3}{4}$

c) $\frac{v_P}{v_T}=\sqrt{\frac{3}{2}}$ e $\frac{g_P}{g_T}=\frac{3}{2}$

d) $\frac{v_P}{v_T}=\frac{3}{2}$ e $\frac{g_P}{g_T}=\frac{3}{2}$

e) Nenhuma das anteriores

Resposta: B

17. (ITA-91) Considere a Terra como sendo uma esfera de raio R e massa M, uniformemente distribuída. Um satélite artificial descreve uma órbita circular a uma altura h da superfície da Terra, onde a aceleração gravitacional (sobre a órbita) é **g**. Em termos de algarismos significativos, o quadrado da velocidade do satélite é melhor representado por:

Dados:

$R = 6{,}378\cdot 10^6\,\text{m}$;
$M = 5{,}983\cdot 10^{24}\,\text{kg}$;
$h = 2{,}00\cdot 10^5\,\text{m}$;
$g = 9{,}2\,\text{m/s}^2$;

a) $16{,}81\cdot 10^6(km/h)^2$

b) $3{,}62\cdot 10^{32}(km/h)^2$
c) $6{,}05\cdot 10^7(m/s)^2$
d) $6{,}0517\cdot 10^7(m/s)^2$
e) Nenhum dos valores apresentados é adequado.

Resposta: C

18. (ITA - 91) Um satélite artificial geo-estacionário permanece acima de um mesmo ponto na superfície da Terra em uma órbita de raio **R**. Usando um valor de $\mathbf{R_T = 6400\ km}$ para o raio da Terra. A razão $\mathbf{R/R_T}$ é aproximadamente igual a:
Dado: $g = 9{,}8\,\text{m/s}^2$(Na superfície terrestre).
a) 290
b) 66
c) 6,6
d) 11,2
e) Indeterminada pois a massa do satélite não é conhecida.

Resposta: C

19. (ITA-92) Na 3ª Lei de Kepler, a constante de proporcionalidade entre o cubo do semi-eixo maior da elipse (**a**) descrita por um planeta e o quadrado do período (**p**) de translação do planeta, pode ser deduzida do caso particular do movimento circular. Sendo **G** a constante da gravitação universal, **M** a massa do Sol, **R** o raio do Sol temos:

a) $\frac{a^3}{p^2}=\frac{G\cdot M\cdot R}{4\pi^2}$

b) $\frac{a^3}{p^2}=\frac{G\cdot R}{4\pi^2}$

c) $\frac{a^3}{p^2}=\frac{G\cdot M}{2\cdot\pi^2}$

d) $\frac{a^3}{p^2}=\frac{G\cdot M}{R^2}$

e) $\frac{a^3}{p^2} = \frac{G \cdot M}{4\pi^2}$

Resposta: E

20. (ITA-93) Qual seria o período (T) de rotação da Terra em torno do seu eixo, para que um objeto apoiado sobre a superfície da Terra no equador, ficasse desprovido de peso?
Dados:
Raio da Terra: $R = 6{,}4 \cdot 10^3$ km;
Massa da Terra: $M = 6{,}0 \cdot 10^{24}$kg;
Constante de Gravitação Universal: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.
a) T=48 h
b) T=12 h
c) T=1,4 h
d) T=2,8 h
e) T=0

Resposta: C

21. (ITA-94) As distâncias médias ao Sol dos seguintes planetas são:
Terra: R_T;
Marte: $R_M=1{,}5R_T$;
Júpiter: $R_J=5{,}2R_T$.
Assim os períodos de revolução de Marte (T_M) e Júpiter (T_J) em anos terrestres (A) são:
a) $T_M=1{,}5A$; $T_J=9{,}7A$;
b) $T_M=1{,}5A$; $T_J=11{,}0A$;
c) $T_M=1{,}8A$; $T_J=11{,}9A$;
d) $T_M=2{,}3A$; $T_J=14{,}8A$;
e) $T_M=3{,}6A$; $T_J=23{,}0A$.

Resposta: C

21. (ITA - 1994) Deixa-se cair um corpo de massa m da boca de um poço que atravessa a Terra, passando pelo seu centro. Desprezando atritos e rotação da Terra, para **/x/** $\leq$**R** o corpo fica sob ação da força **F = -m.g.x/R**, onde a aceleração gravitacional g = 10,0 m/s^2, o raio da Terra **R = 6,4 x 10^6 m** e **x** é a distância do corpo ao centro da Terra (origem de x).Nestas condições podemos afirmar que o tempo de trânsito da boca do poço ao centro da Terra e a velocidade no centro são:
a) 21 min e 11,3 x 10^3 m/s
b) 21 min e 8,0 x 10^3 m/s
c) 84 min e 8,0 x 10^3 m/s
d) 42 min e 11,3 x 10^3 m/s
e) 42 min e 8,0 x 10^3 m/s

Resposta: B

22.(ITA-95) Considere que $\mathbf{M_T}$ é massa da Terra, $\mathbf{R_T}$ o seu raio , **g** a aceleração da gravidade e **G** a constante de gravitação universal. Da superfície terrestre e verticalmente para cima, desejamos lançar um corpo de massa **m** para que, desprezada a resistência do ar ele se eleve a uma altura acima da superfície da Terra igual ao raio da Terra. A velocidade inicial **V** do corpo neste caso deverá ser de:

a) $V = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{2 \cdot R_T}}$

b) $V = \sqrt{\frac{g \cdot R_T}{m}}$

c) $V = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T}}$

d) $V = \frac{g \cdot R_T}{2}$

e) $V = \sqrt{\frac{g \cdot G \cdot M_T}{m \cdot R_T}}$

Resposta: C

23. (ITA-97) O primeiro planeta descoberto fora do sistema solar, 51 Pegasi B, orbita a estrela 51 Pegasi, completando uma revolução a cada 4,2 dias. A descoberta do 51 Pegasi B, feita por meios espectroscópicos, foi confirmada logo em seguida por observação direta do movimento periódico da estrela devido ao planeta que a orbita. Concluiu-se que 51 Pegasi B orbita a estrela 51 Pegasi à 1/20 da distância entre o Sol e a Terra.
Considere as seguintes afirmações: se o semi-eixo maior da órbita do planeta 51 Pegasi B fosse 4 vezes maior do que é, então:

I) A amplitude do movimento periódico da estrela 51 Pegasi, como visto da Terra, seria 4 vezes maior do que é.
II) A velocidade máxima associada ao movimento periódico da estrela 51 Pegasi, como visto da Terra, seria 4 vezes maior do que é.
III) O período de revolução do planeta 51 Pegasi B seria de 33,6 dias.
a) Apenas I é correta.
b) I e II são corretas.
c) I e III são corretas.
d) II e III são corretas.
e) As informações fornecidas são insuficientes para concluir quais são corretas.

Resposta: C

24. (ITA-98) Estima-se que, em alguns bilhões de anos, o raio médio da órbita da Lua estará 50% maior do que é atualmente. Naquela época, seu período, que hoje é de 27,3 dias, seria:
a) 14,1 dias.
b) 18,2 dias.
c) 27,3 dias.
d) 41,0 dias.
e) 50,2 dias.

Resposta: E

25. (ITA-99) Considere a Terra uma esfera homogênea e que a aceleração da gravidade nos polos seja de 9,8m/s^2. O número pelo qual seria preciso multiplicar a velocidade de rotação da Terra de modo que o peso de uma pessoa no Equador ficasse nulo é:
a) 4π.
b) 2π.
c) 3.
d) 10.
e) 17.

Resposta: E

26. (ITA-99) Um relógio de pêndulo, construído de um material de coeficiente de dilatação linear **α**, foi calibrado a uma temperatura de 0°C para marcar um segundo exato ao pé de uma torre de altura **h**. Elevando-se o relógio até o alto da torre observa-se um certo atraso, mesmo mantendo-se a temperatura constante. Considerando **R** o raio da Terra, **L** o comprimento do pêndulo a 0°C e que o relógio permaneça ao pé da torre, então a temperatura para a qual obtém-se o mesmo atraso é dada pela relação:

a) $\dfrac{2h}{\alpha R}$

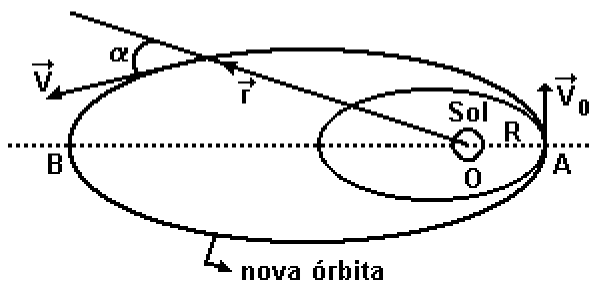
b) $\dfrac{h(2R+h)}{\alpha R^2}$

c) $\dfrac{(R+h)^2 - LR}{\alpha LR}$

d) $\dfrac{R(2h+R)}{\alpha (R+h)^2}$

e) $\dfrac{2R+h}{\alpha R}$

27. (ITA-99) Suponha um cenário de ficção científica em que a Terra é atingida por um imenso meteoro. Em consequência do impacto, somente o módulo da velocidade da Terra é alterado, sendo V_0 seu valor imediatamente após o impacto, como mostra a figura adiante. O meteoro colide com a Terra exatamente na posição onde a distância entre a Terra e o Sol é mínima (distância OA = R na figura). Considere a atração gravitacional exercida pelo Sol, tido como referencial inercial, como a única força de interação que atua sobre a Terra após a colisão, e designe por M a massa do Sol e por G a constante da gravitação universal. Considere ainda que o momento angular da Terra seja conservado, isto é, a quantidade de módulo m.r.V.senα permanece constante ao longo da nova trajetória elíptica da Terra em torno do Sol (nessa expressão, m é a massa da Terra, r é o módulo do vetor posição da Terra em relação ao Sol, V o módulo da velocidade da Terra e α o ângulo entre e r e V). A distância (OB), do apogeu ao centro do Sol, da trajetória que a Terra passa a percorrer após o choque com o meteoro, é dada pela relação:



a)

$$\frac{\left(R^2.V_0^{\,2}\right)}{\left(2.G.M - R.V_0^{\,2}\right)}$$

b)

$$\frac{\left(R^2.V_0^{\,2}\right)}{\left(2.G.M + R.V_0^{\,2}\right)}$$

c)

$$\frac{\left[R^2.V^2.\text{sen}^2(\alpha)\right]}{\left(2.G.M + R.V_0^{\,2}\right)}$$

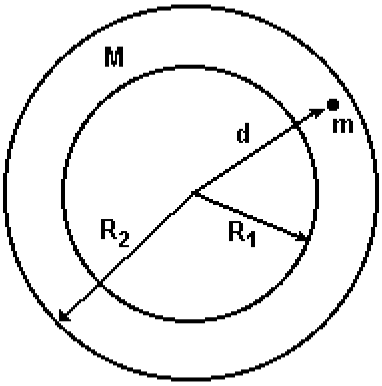
d)

$$\frac{\left(R^2.V_0^{\,2}\right)}{\left[2.G.M\ +\ R.V^2.\text{sen}^2(\alpha)\right]}$$

e) R

Resposta: A

28. (ITA-00) Uma casca esférica tem raio interno R_1, raio externo R_2 e massa M distribuída uniformemente. Uma massa puntiforme m está localizada no interior dessa casca, a uma distância d de seu centro ($R_1 < d < R_2$). O módulo da força gravitacional entre as massas é



a) 0.

b) $\dfrac{GMm}{d^2}$.

c) $\dfrac{GMm}{\left(R_2^{\,3} - d^3\right)}$.

d) $\dfrac{GMm}{\left(d^3 - R_1^{\,3}\right)}$.

e) $\dfrac{GMm\left(d^3 - R_1^{\,3}\right)}{d^2\left(R_2^{\,3} - R_1^{\,3}\right)}$.

Resposta: E

Sugestão do professor Herbert Aquino construa o gráfico da força no exemplo acima em função da distância d ao centro da casca.

29. (ITA-00) O raio do horizonte de eventos de um buraco negro corresponde à esfera dentro da qual nada, nem mesmo a luz, escapa da atração gravitacional por ele exercida. Por coincidência, esse raio pode ser calculado não-relativisticamente como o raio para o qual a velocidade de escape é igual à velocidade da luz. Qual deve ser o raio do horizonte de eventos de um buraco negro com uma massa igual à massa da Terra?

Dados:

Massa da Terra: $M = 6{,}0 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$;

Constante de Gravitação Universal: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$;

Velocidade da luz no vácuo: $3{,}0 \cdot 10^8\ m/s$

a) 9 µm.

b) 9 mm.

c) 30 cm.

d) 90 cm.

e) 3 km.

Resposta: B

30. (ITA-02) Um dos fenômenos da dinâmica de galáxias, considerado como evidência da existência de matéria escura, é que estrelas giram em torno do centro de uma galáxia com a mesma velocidade angular, independentemente de sua distância ao centro. Sejam M_1 e M_2 as porções de massa (uniformemente distribuída) da galáxia no interior de esferas de raios R e 2R, respectivamente. Nestas condições, a relação entre essas massas é dada por:

a) $M_2 = M_1$.

b) $M_2 = 2M_1$.

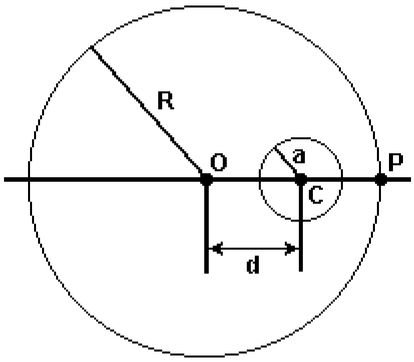
c) $M_2 = 4M_1$.

d) $M_2 = 8M_1$.

e) $M_2 = 16M_1$.

Resposta: D

31. (ITA-03)

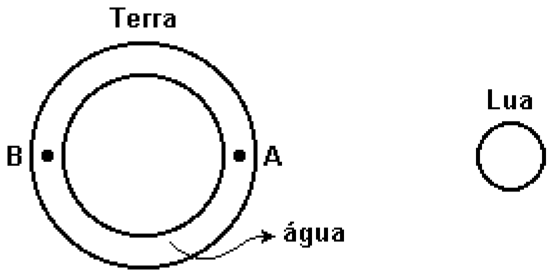


Variações no campo gravitacional na superfície da Terra podem advir de irregularidades na distribuição de sua massa. Considere a Terra como uma esfera de raio R e de densidade ρ, uniforme, com uma cavidade esférica de raio a, inteiramentente contida no seu interior. A distância entre os centros O, da Terra, e C, da cavidade, é d, que pode variar de 0 (zero) até R - a, causando, assim, uma variação do campo gravitacional em um ponto P, sobre a superfície da Terra, alinhado com O e C. (Veja a figura). Seja G_1 a intensidade do campo gravitacional em P sem a existência da cavidade na Terra, e G_2, a intensidade do campo no mesmo ponto, considerando a existência da cavidade. Então, o valor máximo da variação relativa: $(G_1 - G_2)/G_1$, que se obtém ao deslocar a posição da cavidade, é

a) $\dfrac{a^3}{\left[(R-a)^2 R\right]}$.
b) $(a/R)^3$.
c) $(a/R)^2$.
d) a/R.
e) nulo.

Resposta: D

32. . (ITA-03) Sabe-se que a atração gravitacional da lua sobre a camada de água é a principal responsável pelo aparecimento de marés oceânicas na Terra. A figura mostra a Terra, supostamente esférica, homogeneamente recoberta por uma camada de água.



Nessas condições, considere as seguintes afirmativas:
I. As massas de água próximas das regiões A e B experimentam marés altas simultaneamente.
II. As massas de água próximas das regiões A e B experimentam marés opostas, isto é, quando A tem maré alta, B tem maré baixa e vice-versa.
III. Durante o intervalo de tempo de um dia ocorrem duas marés altas e duas marés baixas.

Então, está(ão) correta(s), apenas
a) a afirmativa I.
b) a afirmativa II.
c) a afirmativa III.
d) as afirmativas I e II.
e) as afirmativas I e III.

Resposta: E

33. (Ita 2004) Uma estrela mantém presos, por meio de sua atração gravitacional, os planetas Alfa, Beta e Gama. Todos descrevem órbitas elípticas, em cujo foco comum se encontra a estrela, conforme a primeira Lei de Kepler. Sabe-se que o semieixo maior da órbita de Beta é o dobro daquele da órbita de Gama. Sabe-se também que o período de Alfa é $\sqrt{2}$ vezes maior que o período de Beta. Nestas condições, pode-se afirmar que a razão entre o período de Alfa e o de Gama é:
a) $\sqrt{2}$.
b) 2.
c) 4.
d) $4\sqrt{2}$.
e) $6\sqrt{2}$.

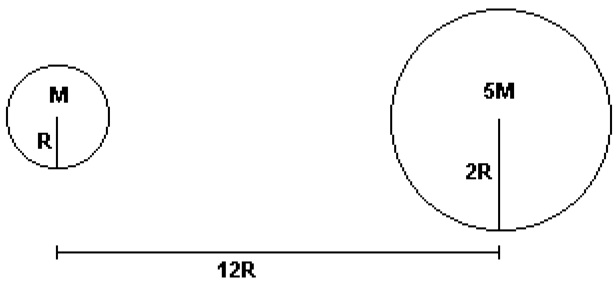
Resposta: C

34. (ITA-05) Satélite síncrono é aquele que tem sua órbita no plano do equador de um planeta, mantendo-

se estacionário em relação a este. Considere um satélite síncrono em órbita de Júpiter cuja massa é $M_J = 1,9 \times 10^{27}$ kg e cujo raio é $R_J = 7,0 \times 10^{7}$ m. Sendo a constante da gravitação universal $G = 6,7 \times 10^{-11}$ $m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$ e considerando que o dia de Júpiter é de aproximadamente 10 h, determine a altitude do satélite em relação à superfície desse planeta.

Resposta: $9,1 \times 10^{7}$ m.

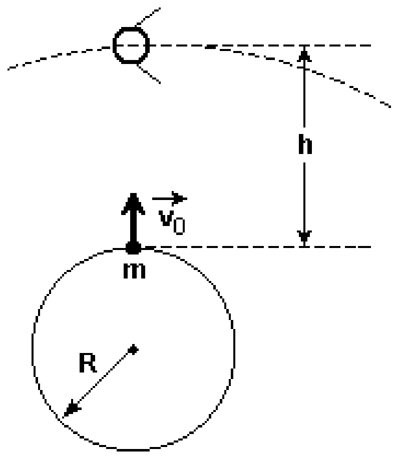
35. (ITA-05) Dois corpos esféricos de massa M e 5M e raios R e 2R, respectivamente, são liberados no espaço livre. Considerando que a única força interveniente seja a da atração gravitacional mútua, e que seja de 12R a distância de separação inicial entre os centros dos corpos, então, o espaço percorrido pelo corpo menor até a colisão será de



a) 1,5R
b) 2,5R
c) 4,5R
d) 7,5R
e) 10,0R

Resposta: D

36. (ITA-07) Lançado verticalmente da Terra com velocidade inicial V_0, um parafuso de massa m chega com velocidade nula na órbita de um satélite artificial, geoestacionário em relação à Terra, que se situa na mesma vertical. Desprezando a resistência do ar, determine a velocidade V_0 em função da aceleração da gravidade g na superfície da Terra, raio da Terra R e altura h do satélite.



Resposta: $v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot R \cdot h}{(R+h)}}$

37. (ITA-08) A estrela anã vermelha Gliese 581 possui um planeta que, num período de 13 dias terrestres, realiza em torno da estrela uma órbita circular, cujo raio é igual a 1/14 da distância média entre o Sol e a Terra. Sabendo que a massa do planeta é aproximadamente igual à da Terra, pode-se dizer que a razão entre as massas da Gliese 581 e do nosso Sol é de aproximadamente:
a) 0,05
b) 0,1
c) 0,6
d) 0,3
e) 4,0

Resposta:D

38. (ITA-08) Numa dada balança, a leitura é baseada na deformação de uma mola quando um objeto é colocado sobre sua plataforma. Considerando a Terra como uma esfera homogênea, assinale a opção que indica uma posição da balança sobre a superfície terrestre onde o objeto terá a maior leitura.
a) Latitude de 45°.
b) Latitude de 60°.
c) Latitude de 90°.
d) Em qualquer ponto do Equador.
e) A leitura independe da localização da balança já que a massa do objeto é invariável.

Resposta: C

39. (ITA-09) Desde os idos de 1930, observações astronômicas indicam a existência da chamada matéria escura. Tal matéria não emite luz, mas a sua presença é inferida pela influência gravitacional que ela exerce sobre o movimento de estrelas no interior de galáxias. Suponha que, numa galáxia, possa ser removida sua matéria escura de massa específica $\rho > 0$, que se encontra uniformemente distribuída. Suponha também que no centro dessa galáxia haja um buraco negro de massa M, em volta do qual uma estrela de massa m descreve uma órbita circular. Considerando órbitas de mesmo raio na presença e na ausência de matéria escura, a respeito da força gravitacional resultante $\vec{F}$ exercida sobre a estrela e seu efeito sobre o movimento desta, pode-se afirmar que:

a) $\vec{F}$ é atrativa e a velocidade orbital de m não se altera na presença da matéria escura.

b) $\vec{F}$ é atrativa e a velocidade orbital de m é menor na presença da matéria escura.

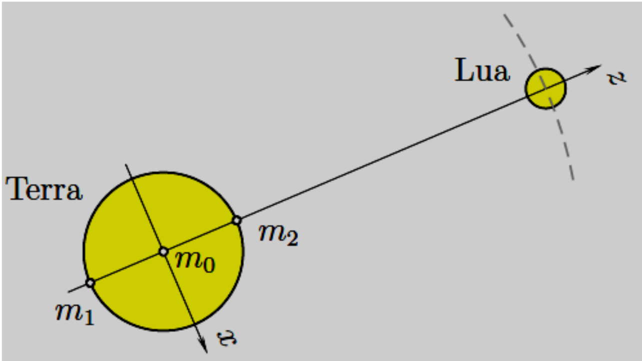
c) $\vec{F}$ é atrativa e a velocidade orbital de m é maior na presença da matéria escura.

d) $\vec{F}$ é repulsiva e a velocidade orbital de m é maior na presença da matéria escura.

e) $\vec{F}$ é repulsiva e a velocidade orbital de m é menor na presença da matéria escura.

Resposta: C

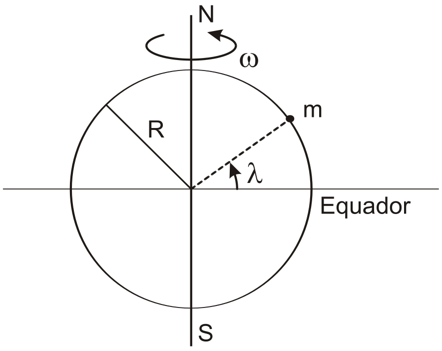
40. (ITA-09) Lua e Sol são os principais responsáveis pelas forças de maré. Estas são produzidas devido às diferenças na aceleração gravitacional sofrida por massas distribuídas na Terra em razão das respectivas diferenças de suas distâncias em relação a esses astros. A figura mostra duas massas iguais, $m_1 = m_2 = m$, dispostas sobre a superfície da Terra em posições diametralmente opostas e alinhadas em relação à Lua, bem como uma massa $m_0 = m$ situada no centro da Terra. Considere G a constante de gravitação universal, M a massa da Lua, r o raio da Terra e R a distância entre os centros da Terra e da Lua. Considere, também, f_{0z}, f_{1z} e f_{2z} as forças produzidas pela Lua respectivamente sobre as massas m_0, m_1 e m_2. Determine as diferenças $(f_{1z}-f_{0z})$ e $(f_{2z}-f_{0z})$ sabendo que deverá usar a aproximação $\frac{1}{(1+x)^{\alpha}} = 1 - \alpha x$, quando $x \ll 1$.



Resposta: $f_{1z} - f_{0z} = GMm\left[\frac{1}{R^2}\left(1-\frac{2R}{R}\right)-\frac{1}{R^2}\right]$

$$f_{2z} - f_{0z} = \frac{2GMmr}{R^3}$$

41. (ITA-10) Considere a Terra como uma esfera homogênea de raio R que gira com velocidade angular uniforme ω em torno do seu próprio eixo Norte-Sul. Na hipótese de ausência de rotação da Terra, sabe-se que a aceleração da gravidade seria dada por $g = GM/R^2$. Como $\omega \neq 0$, um corpo em repouso na superfície da Terra na realidade fica sujeito forçosamente a um peso aparente, que pode ser medido, por exemplo, por um dinamômetro, cuja direção pode não passar pelo centro do planeta.



Então, o peso aparente de um corpo de massa m em repouso na superfície da Terra a uma latitude λ é dado por

a) $mg - m\omega^2 R\cos\lambda$.

b) $mg - m\omega^2 R\,\text{sen}2\lambda$.

c) $mg\sqrt{1-\left[2\omega^2R/g+\left(\omega^2R/g\right)^2\right]\text{sen}^2\lambda}$.

d) $mg\sqrt{1-\left[2\omega^2R/g-\left(\omega^2R/g\right)^2\right]\cos^2\lambda}$.

e) $mg\sqrt{1-\left[2\omega^2R/g-\left(\omega^2R/g\right)^2\right]\text{sen}^2\lambda}$.

Resposta: D

42. (ITA-10) Considere um segmento de reta que liga o centro de qualquer planeta do sistema solar ao centro do Sol. De acordo com a 2ª Lei de Kepler, tal segmento percorre áreas iguais em tempos iguais. Considere, então, que em dado instante deixasse de existir o efeito da gravitação entre o Sol e o planeta.

Assinale a alternativa correta.
a) O segmento de reta em questão continuaria a percorrer áreas iguais em tempos iguais.
b) A órbita do planeta continuaria a ser elíptica, porem com focos diferentes e a 2ª Lei de Kepler continuaria válida.
c) A órbita do planeta deixaria de ser elíptica e a 2ª Lei de Kepler não seria mais válida.
d) A 2ª Lei de Kepler só é valida quando se considera uma força que depende do inverso do quadrado das distâncias entre os corpos e, portanto, deixaria de ser válida.
e) O planeta iria se dirigir em direção ao Sol.

Resposta: A

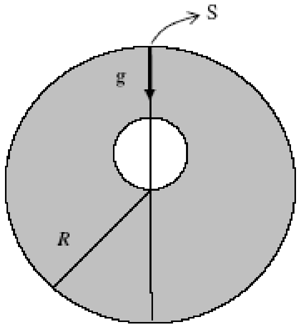
43. (ITA-10) Derive a 3ª Lei de Kepler do movimento planetário a partir da Lei da Gravitação Universal de Newton considerando órbitas circulares.

Resposta: Ver com o professor

44. (ITA-11) Na ficção científica *A Estrela*, de H.G. Wells, um grande asteroide passa próximo a Terra que, em consequência, fica com sua nova orbita mais próxima do Sol e tem seu ciclo lunar alterado para 80 dias. Pode-se concluir que, após o fenômeno, o ano terrestre e a distância Terra-Lua vão tornar-se, respectivamente,
a) mais curto – aproximadamente a metade do que era antes.
b) mais curto – aproximadamente duas vezes o que era antes.
c) mais curto – aproximadamente quatro vezes o que era antes.
d) mais longo – aproximadamente a metade do que era antes.
e) mais longo – aproximadamente um quarto do que era antes.

Resposta: B

45. (UFPI-PSE) Suponha que um asteróide esférico, de raio **R**, possui uma cavidade esférica de raio **R/4**, conforme a figura a seguir:



A parte maciça do asteróide é homogênea. Se sua cavidade fosse preenchida com igual densidade, sua massa seria **M**. A aceleração da gravidade no ponto S da superfície do asteróide vale:
a) $\frac{7GM}{8\cdot R^2}$

b) $\frac{7GM}{9\cdot R^2}$

c) $\frac{35GM}{36\cdot R^2}$
d) $\frac{GM}{R^2}$

e) $\frac{9GM}{8\cdot R^2}$

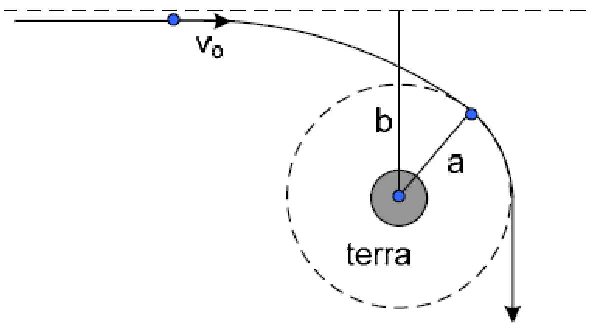
Resposta: C (Falta conferir)

46. (ITA-Modificada) O professor Herbert Aquino pede que você determine o trabalho necessário para levar a partícula de massa $M/3$ do ponto “A” até o ponto “B”, em função da constante de gravitação **G**, quando essa partícula se encontra sob a ação de 2 massas, “**M**” e “**2M**”, conforme indica a figura abaixo.

Observação: Fazer a figura

47. (P.Lucie) Uma nave espacial tripulada por marcianos chega à vizinhança da Terra (de massa M)

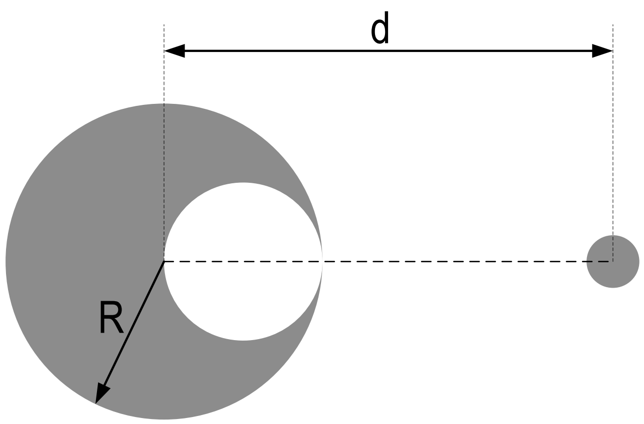
seguindo uma órbita hiperbólica cuja assíntota dista b do centro da Terra. Quando a nave se encontrava a uma distância muito grande da Terra, sua velocidade era V_O. Qual a relação entre V_O, b e a distância de perigeu a?



Sugestão do professor Herbert: Aplique a conservação do momento angular e da energia mecânica.

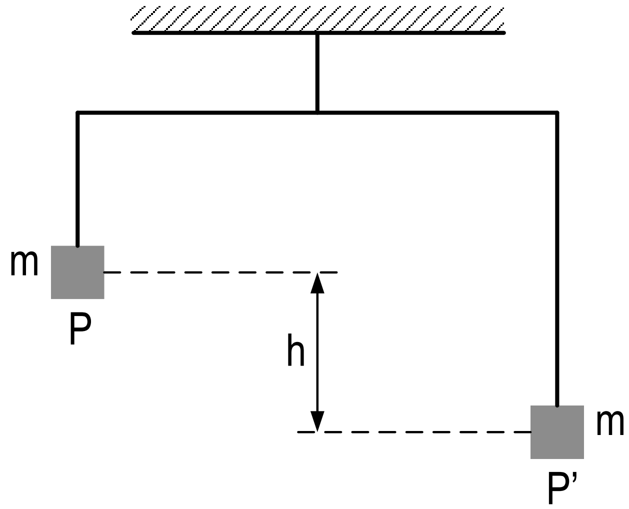
Resposta: $Vo^2 \cdot \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) = \frac{2 \cdot G \cdot M}{a}$

48. (Halliday) O problema seguinte foi apresentado na "Olimpíada" da Universidade Pública de Moscou, em 1946 (veja a Figura): Numa esfera de chumbo de raio *R,* faz-se uma cavidade esférica de tal modo que a sua superfície toca a superfície externa da esfera de chumbo e passa pelo centro desta. A massa da esfera antes que a cavidade fosse feita era *M.* Com que força, de acordo com a lei da gravitação universal, a esfera de chumbo irá agora atrair uma pequena esfera de massa *m,* que está à distância *d* do centro da esfera de chumbo, sobre uma linha reta que une os centros das esferas e da cavidade?



Resposta: $F = \frac{GmM}{d^2}\left[1 - \frac{1}{8 \cdot \left(1 - \frac{R}{2d}\right)^2}\right]$

49. (Halliday) Dois objetos, cada um de massa m, estão pendurados em fios de diferentes comprimentos em uma balança, na superfície da Terra, conforme a figura abaixo. Se os fios têm massa desprezível e a diferença entre seus comprimentos é h.



Mostre que o erro na pesagem, associado ao fato de que P' está mais perto da Terra que P é:

$$P' - P = \frac{8 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho \cdot m \cdot h}{3}$$

Onde ρ é a densidade média da Terra. Considere $h \ll R$ e use se necessário aproximação $(1 + x)^n \cong 1 + nx$.

50. (Halliday) Mostre que, no fundo de um poço de uma mina vertical de profundidade D, o valor de g será $g = g_S \cdot \left(1 - \frac{D}{R}\right)$ onde g_S é o valor na superfície. Suponha que a Terra seja uma esfera uniforme de raio R.

51. (Halliday) Dois objetos pontuais, cada um de massa **m**, estão conectados por uma corda sem massa de comprimento **L**. Os objetos estão suspensos verticalmente próximos à superfície da Terra de maneira que um objeto está pendurado embaixo do outro. Então os objetos são liberados. Considerando que a massa da Terra é **M** e seu raio é **R**, mostre a tração na corda é:

$$T = \frac{G \cdot m \cdot M \cdot L}{R^3}$$

52. (Halliday) A taxa de rotação mais rápida possível de um planeta é aquela para a qual a força gravitacional sobre o material no equador provê apenas a força centrípeta necessária para a rotação. Mostre então que o mais curto período de rotação correspondente é dado por:

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G \cdot \rho}}$$

Onde ρ é a massa específica média do planeta, suposta ser homogênea.

53. (Halliday) Um foguete se extingue a uma altitude h acima da superfície da Terra. Sua velocidade $\mathbf{v_0}$ no momento da extinção excede a velocidade de escape $\mathbf{v_{ESC}}$ apropriada para aquela altitude. Mostre que a velocidade **v** do foguete quando muito longe da Terra é dada por:

$$v = \left(v_0^2 - v_{ESC}^2\right)^{1/2}$$

54. (Halliday) Um foguete é acelerado até uma velocidade $v = 2\sqrt{g \cdot R_T}$ próximo à superfície da Terra e então segue subindo. Mostre que muito longe da Terra, sua velocidade é de $v' = \sqrt{2 \cdot g \cdot R_T}$.

55. (Halliday) Um satélite, em uma órbita elíptica de excentricidade **e**, tem uma velocidade $\mathbf{v_A}$ no apogeu, $\mathbf{v_P}$ no perigeu e $\mathbf{v_0}$ nas extremidades do semi-eixo menor de sua órbita. Mostre que:

$$\frac{v_A}{v_P} = \left[\frac{1-e}{1+e}\right]$$

56. (Halliday) Um cometa move-se em uma órbita de excentricidade igual a 0,880 e tem velocidade de 3,72 km/s quando está o mais distante possível do Sol. Determine a sua velocidade quando estiver no ponto mais próximo do Sol.

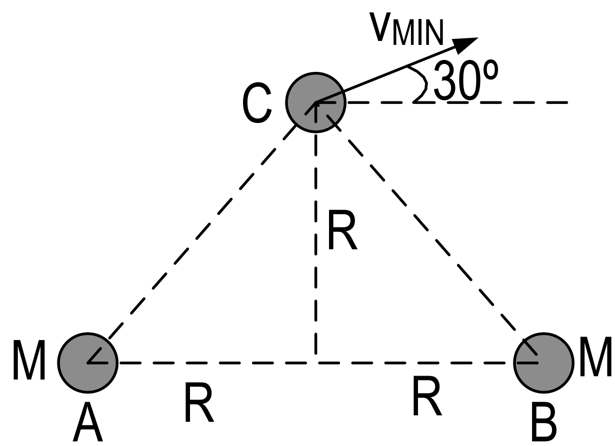
Resposta: 58,3 km/s

57. (Halliday) Considere um satélite artificial em uma órbita circular em torno da Terra. Diga como as seguintes propriedades do satélite variam em função do raio r de sua órbita:
a) Período:
b) Energia cinética:
c) Momento angular:
d) Velocidade:

58. (Physics Challenger) Um planeta esférico homogêneo gira em torno de seu eixo. A velocidade de um ponto no equador do planeta é v. Devido a rotação do planeta em torno de seu eixo a aceleração da gravidade no equador do planeta é igual a $1/2$ da aceleração da gravidade nos polos. A velocidade de escape da partícula (v_E) nos polos do planeta em termos de v é:
a) $v_E = 2v$
b) $v_E = v/2$
c) $v_E = v$
d) $v_E = \sqrt{3}v$

Resposta:A

59. (Physics Challenger-Modificada) O professor Herbert Aquino pede que você determine a velocidade mínima que deve possuir uma partícula de massa m projetada a partir do ponto C na presença de dois outros corpos (A e B) cada um de massa M para que ela escape da atração gravitacional destas partículas.



Resposta: $v_{MIN} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M \cdot \sqrt{2}}{R}}$

60. (IIT-JEE) A distância entre duas estrelas é igual a **10 a**. As massas das estrelas são iguais a **M** e **16M** e seus raios iguais a **a** e **2a** respectivamente. Um corpo

de massa **m** é atirado da superfície da estrela maior em direção à estrela menor ao longo da reta que une os seus centros. O professor Herbert Aquino pede que você calcule a velocidade mínima necessária que deve ser dada ao corpo para que ele atinja a superfície da estrela menor. Obtenha a resposta em função de **G**, **M** e **a**.

Resposta: $v_{MIN} = \frac{3\cdot\sqrt{5}}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{G\cdot M}{a}}\right)$

61. (New Pattern- DC Pandey) Uma partícula é projetada da superfície da Terra com uma velocidade igual à velocidade de escape do planeta formado um ângulo de 45 º com horizontal. Determine o ângulo formado entre a velocidade com a horizontal quando o objeto atinge uma altura em relação à superfície da Terra igual a R. (Interprete a reta horizontal como a reta tangente a superfície de raio 2R no ponto pedido).

Resposta: 60º

62. Três partículas idênticas de mesma massa **m** são colocadas nos vértices de um triângulo equilátero de lado **a**. O professor Herbert Aquino pede que você calcule o trabalho necessário para aumentar a separação entre as partículas para uma distância **2a**.

63. Dois satélites de mesma massa **m** orbitam a Terra (raio R e massa **M**) em uma mesma órbita de raio r e giram em sentidos opostos. Em um determinado instante, eles sofrem uma colisão perfeitamente inelástica. O professor Herbert Aquino pede que você determine a energia total do sistema antes e depois da colisão.

64. Quatro partículas idênticas, cada uma de massa **m**, se movimentam ao longo de uma circunferência de raio **r** devido à atração gravitacional mútua entre elas conforme mostra a figura abaixo. O professor Herbert Aquino pede que você determine a velocidade de cada uma das partículas.