Material Elaborado por Caio Guimarães

Física Moderna:

Análise da Aplicação da Teoria nos Exercícios do ITA

Capítulo 3:
A Dualidade Partícula Onda
& Hipótese de De Broglie ; Princípio de Incerteza

Introdução

A resposta à dúvida do caráter ora ondulatório e ora de partícula das emissões eletromagnética pôde ser analisada com o experimento do efeito fotoelétrico de Einstein. O choque de uma emissão eletromagnética contra uma placa arrancava elétrons da mesma, evidenciando sob certas condições (como vimos, a freqüência para o fenômeno é restrita) o caráter de partícula por parte de ondas. Estudaremos a seguir um segundo fenômeno que corroborou a tese de Einstein.

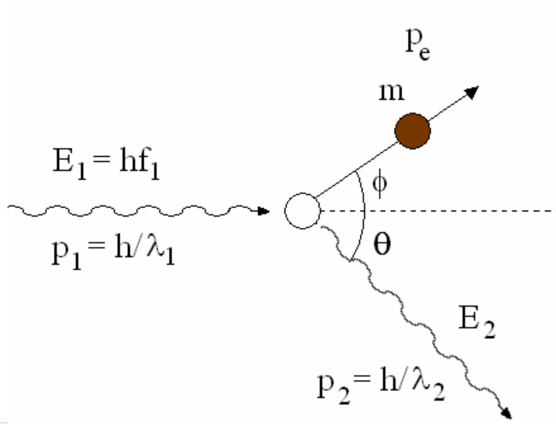
Efeito Compton

O fenômeno descoberto pelo físico Arthur Holly Compton em 1923, chamado Efeito Compton, analisa a diminuição de energia de um fóton quando esse colide com matéria. A diminuição de energia ocorre com a mudança no comprimento de onda (aumenta). Tal mudança nos evidencia que a luz, por exemplo, não tem caráter puramente ondulatório (assim como Einstein já havia evidenciado em seu experimento do efeito fotoelétrico). Usaremos um resultado do Eletromagnetismo de que radiações eletromagnéticas carregam momento linear (p) :

$$E \underset{\substack{\downarrow \\ Eletromagnetismo}}{=} p.c \underset{\substack{\downarrow \\ Planck}}{=} hf \qquad \therefore \quad p = \frac{hf}{c}$$

A situação descrita no efeito Compton está ilustrada ao lado.

Deduziremos agora uma expressão para o aumento no comprimento de onda do fóton após o choque.



É importante deixar claro que algumas passagens da dedução parecerão complicadas a primeira vista, pois utilizaremos resultados da Física relativística. Pedimos que mesmo que o conceito ainda não esteja completamente claro ainda (veremos mais isso mais a frente nesse curso de Física Moderna), que o leitor 'acredite' nos resultados que estaremos usando.

Tais resultados são:

Energia associada à matéria (energia de repouso): $E = mc^2$

Energia associada a matéria com velocidade: $E = \sqrt{\left(mc^2\right)^2 + \left(p.c\right)^2}$

Voltando ao problema, considerando uma colisão entre o fóton e um elétron em repouso (veja figura), temos da conservação de energia:

$$E_{\substack{repouso \\ particula}} + E_{\substack{foton \\ inicial}} = E_{\substack{velocidade \\ particula}} + E_{\substack{foton \\ final}}$$

$$mc^2 + hf_1 = \sqrt{\left(mc^2\right)^2 + \left(p_e.c\right)^2} + hf_2$$

$$\therefore \left(mc^2 + hf_1 - hf_2\right)^2 = \left(mc^2\right)^2 + \left(p_e.c\right)^2$$

$$p_e{}^2 = \frac{\left(mc^2 + hf_1 - hf_2\right)^2 - \left(mc^2\right)^2}{c^2}$$

Na direção da colisão, não há forças externas, portanto podemos conservar também a quantidade de movimento naquela direção e na direção perpendicular a mesma.:

$$\overrightarrow{p_{\substack{foton \\ inicial}}} = \overrightarrow{p_{\substack{foton \\ final}}} + \overrightarrow{p_{\substack{eletron \\ final}}}$$

$$\begin{cases} p_{\substack{foton \\ inicial}} = p_{\substack{eletron \\ final}}.\cos\phi + p_{\substack{foton \\ final}}.\cos\theta \\ p_{\substack{foton \\ inicial}}.sen\phi = p_{\substack{foton \\ final}}.sen\theta \end{cases}$$

Lembrando que $p_{\substack{foton \\ inicial}} = h\dfrac{f_1}{c}$ $\quad p_{\substack{foton \\ final}} = h\dfrac{f_2}{c}$

Temos então o sistema:

$$\begin{cases} p_e.\cos\phi = \dfrac{hf_1}{c} - \dfrac{hf_2}{c}.\cos\theta \\ \dfrac{hf_1}{c}.sen\phi = \dfrac{hf_2}{c}.sen\theta \end{cases}$$

Resolvendo e eliminando o parâmetro ϕ (Fica como exercício para o leitor), chegamos à seguinte expressão para p_e:

$$p_e^{\,2} = \frac{h^2 f_1^{\,2}}{c^2} + \frac{h^2 f_2^{\,2}}{c^2} - 2\frac{h^2.f_1.f_2.\cos\theta}{c^2}$$

Da conservação de energia já tínhamos obtido que:

$$p_e^{\,2} = \frac{\left(mc^2 + hf_1 - hf_2\right)^2 - \left(mc^2\right)^2}{c^2}$$

Logo:

$$p_e^{\,2} = \frac{\left(mc^2 + hf_1 - hf_2\right)^2 - \left(mc^2\right)^2}{c^2} = \frac{h^2 f_1^{\,2}}{c^2} + \frac{h^2 f_2^{\,2}}{c^2} - 2\frac{h^2.f_1.f_2.\cos\theta}{c^2}$$

Arrumando a igualdade e lembrando que $c=\lambda f$ (fica como exercício), chegamos à expressão conhecida do efeito Compton:

$$\boxed{\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc}\left(1 - \cos\theta\right)}$$

Exercício Proposto

1. Calcule a modificação percentual do comprimento de onda no espalhamento de Compton a 180^o

a. **de um raio X de** $80\ keV$**;**
b. **de um raio g oriundo da aniquilação de um par elétron-pósitron em repouso.**

Hipótese de DeBroglie

A esse ponto não restava dúvida de que de fato ondas poderiam se comportar como partículas em certas situações (Efeito Fotoelétrico, Efeito Compton).

Até esse ponto na física sempre foi razoável testar o efeito contrário de cada fenômeno. No eletromagnetismo, Faraday e Lenz estudaram o fenômeno de geração elétrica a partir de uma variação no campo magnético local, e foi razoável aceitar a tese provada por Ampére de que uma variação do campo elétrico também gera campo magnético. Esse é apenas um dos inúmeros exemplos de simetria que ocorrem na física.

Bom, os resultados conhecidos diziam que para ondas vale:

$$E = hf = p.c \quad \Rightarrow \quad h\frac{c}{\lambda} = pc$$

$$\therefore \quad \lambda = \frac{h}{p}$$

De Broglie propôs então que a matéria teria um comprimento de onda associado a ela, dado pela expressão:

$$\boxed{\lambda_{materia} = \frac{h}{mv}}$$

De acordo com a expressão o caráter ondulatório da matéria só seria perceptível para massas extremamente pequenas. Ou seja, seria um absurdo propor que se atirássemos inúmeras bolas de tênis numa fenda única, haveria difração...

A hipótese de De Broglie foi comprovada em 1927 (3 anos após a data em que De Broglie fez sua proposta), por Davisson e Germer ao estudarem a natureza da superfície de um cristal de Níquel. Eles perceberam que ao incidirem um feixe de elétrons (partículas) contra a superfície, ao invés de haver reflexão difusa, houve uma reflexão similar à observada na incidência de raios X. A incidência de raios X num cristal geram uma forte reflexão a certo ângulo de tal maneira que haja interferência construtiva e um reforço seja perceptível.

Analisando os ângulos nos quais isso aconteciam para o Raio X e os ângulos nos quais isso aconteciam para os elétrons, percebeu-se que nessas situações os elétrons possuíam o exato comprimento de onda proposto por De Broglie.

Ora, então De Broglie estava certo! A interferência construtiva observada nos cristais NUNCA ocorreria de acordo com a teoria corpuscular do elétron.

Conseqüências da hipótese de De Broglie pro átomo de Bohr

Uma das mais importantes conseqüências da teoria de De Broglie é que a mesma justificava os antes indemonstráveis postulados de Bohr (ver capítulo 2).

De Broglie explicou que cada elétron do átomo de Bohr é acompanhado de uma onda estacionária associada guiando seu movimento, dessa maneira a aceleração não estaria contribuindo para a emissão de energia eletromagnética. Para que uma onda estacionária se ajustasse à órbita circular do elétron, devemos ter que o comprimento da órbita circular equivalha a um número inteiro de comprimento de ondas do elétron. Ou seja:

$$\underbrace{2\pi r}_{\substack{\text{comprimento}\\ \text{da orbita circular}}} = n\lambda \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Da hipótese de De Broglie: $\lambda = \dfrac{h}{mv}$

$$2\pi r = n\frac{h}{mv} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{\therefore \quad mvr = n\frac{h}{2\pi} \qquad n \in \mathbb{Z}}$$

A expressão acima já é conhecida! É mais de uns previamente indemonstráveis postulados de Bohr. Concluímos que a teoria de De Broglie foi bastante razoável e apresentava total consistência com a teoria de Bohr!

Exercício Contextualizado Resolvido

1. Um elétron em movimento manifesta uma onda de matéria com comprimento de onda de De Broglie igual a 10^{-10} m . Sendo a massa do elétron igual a 9,1. 10^{-31} kg, sua carga é $1{,}6.10^{-19}$ C e a constante de Planck igual a 6,63 . 10^{-34} J.s, qual a DDP necessária para acelera-lo do repouso até a velocidade necessária?

Solução:

Da Hipótese de De Broglie, segue:

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{h}{m\lambda} = \frac{6,63.10^{-34}}{9,1.10^{-31}.10^{-10}} \cong 7,28.10^{6}\ m/s$$

Utilizando o Teorema do Trabalho e Energia Cinética, desconsiderando o efeito relativístico do elétron:

$$W_{\substack{campo\\ elétrico}} = \Delta E_{cinetica}$$

$$\Rightarrow \quad U.q = \frac{1}{2}m.v^2 - 0$$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{m.v^2}{2q} = \frac{9,1.10^{-31}.7,28^2.10^{12}}{2.1,6.10^{-19}} = 150,7\ V$$

A DDP necessária é de aproximadamente 150,7 V.

Princípio de Incerteza de Heisenberg

Conforme foi dito na introdução desse artigo, muitos dos conceitos aqui apresentados carecem de demonstrações rigorosas. Isso é compreensível se formos pensar que a teoria que estamos estudando levou a criação da Mecânica Quântica, um ramo da física que envolve muita teoria e matemática pesada (fugindo então dos propósitos desse curso). É importante que entendamos os conceitos extraídos dos resultados desses cientistas, e sabermos como aplica-los (principalmente nos exercícios do ITA, como o curso se propõe a fazer).

Werner Heisenberg é um cientista alemão que se propôs a mostrar, ou exprimir matematicamente, sua tese de que a posição e velocidade do elétron em torno do núcleo do átomo são impossíveis de precisar simultaneamente.

Para medir experimentalmente a posição do elétron precisamos de instrumentos de medidas (um dos métodos conhecidos na época consistia de incidir um tipo de radiação sobre o mesmo). Os instrumentos de medida, por sua vez possuem incertezas de medição. Quanto menor a incerteza, mais precisa é a localização do elétron.

Com base na base da teoria da mecânica quântica já desenvolvida, Heisenberg enunciou que o produto da incerteza da posição pela incerteza do momento linear de um elétron não pode ser inferior (em ordem de grandeza) à metade da constante de Planck reduzida. Ou seja:

$$\boxed{\Delta p.\Delta x \geq \frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi}}$$

A conclusão é que o elétron não está bem definido na sua órbita do átomo. Quanto mais preciso soubermos sua posição, menos preciso para nós será sua velocidade, tornando assim impossível descrever o elétron em cada instante. Esse enunciado é conhecido como Princípio da Incerteza de Heisenberg.

Exercícios Propostos de Revisão

1. Um arma dispara um projétil de 20 g a uma velocidade de 500 m/s . Determine o comprimento de onda de De Broglie associado ao projétil e explique por que o caráter ondulatório não é aparente nessa situação.

2. Um microscópio eletrônico pode resolver estruturas de pelo menos 10 vezes o comprimento de onda de De Broglie do elétron. Qual é a menor estrutura que pode ser resolvida num microscópio eletrônico, usando elétrons com energia cinética de 10000 eV ?

3. (ITA 2003) Marque verdadeiro ou falso.
I – No efeito fotoelétrico, quando um metal é iluminado por um feixe de luz monocromática a quantidade de elétrons emitidos pelo metal é diretamente proporcional à intensidade do feixe incidente, independente da freqüência da luz.
II – As órbitas permitidas ao elétron em um átomos são aquelas em que o momento angular é nh/2π para n=1,3,5...
III – Os aspectos corpuscular e ondulatório são necessários para a descrição completa de um sistema quântico.

IV – A natureza complementar do mundo quântico é expressa, no formalismo da Mecânica Quântica, pelo princípio de incerteza de Heisenberg.

4. (ITA 2004) Um elétron é acelerado a partir do repouso por meio de uma diferença de potencial U, adquirindo uma quantidade de movimento p. Sabe-se que, quando o elétron está em movimento, sua energia relativística é dada por $E = \sqrt{(m_0c^2)^2 + p^2c^2}$ **em que mo é a massa de repouso do elétron e c é a velocidade da luz no vácuo. Obtenha o comprimento de onda de De Broglie do elétron em função de U e das constantes fundamentais pertinentes.**
OBS do autor: Essa questão é muito parecida com o exercício contextualizado resolvido.

5. (ITA 2005) Um átomo de hidrogênio inicialmente em repouso emite um fóton numa transição do estado de energia n para o estado fundamental. Em seguida, o átomo atinge um elétron em repouso que com ele se liga, assim permanecendo após a colisão. Determine literalmente a velocidade do sistema átomo + elétron após a colisão. Dados: a energia do átomo de hidrogênio no estado n é $E_n = \frac{E_0}{n^2}$; **o momento linear do fóton é hf/c , e a energia deste é hf, em que h é a constante de Planck, f é a freqüência do fóton e c é a velocidade da luz.**

6. (ITA 2005) Num experimento, foi de 5,0.10³m/s a velocidade de um elétron, medida com precisão de 0,003%. Calcule a incerteza na determinação da posição do elétron, sendo conhecidos: massa do elétron 9,1.10^{-31} kg e constante de Planck reduzida $\hbar = 1{,}1.10^{-34}\,J.s$

Gabarito:
1) 6,63.10^{-35} m 2) 5.10^{-10} m 3) F-F-V-V
4)

$$\lambda = \frac{hC}{[(qU)^2 + 2qUm_0C^2]^{1/2}}$$

5)

$$v = \frac{M_H \cdot E_0}{(M_H + M_e)\cdot c}\cdot\left(\frac{1}{n^2} - 1\right)$$

6) A incerteza mínima é de, aproximadamente, 0,04 %

Créditos

O material é de origem original, digitado e compilado por mim, porém com várias referencias. Utilizei o caderno de um professor, um dos melhores professores de física do ensino médio Brasil em minha opinião: Ricardo Luiz, para o acervo de questões propostas. Foram utilizadas informações de pesquisa no wikipedia.org . O material tem como intuito ser utilizado para estudo apenas, principalmente para aqueles que não têm acesso tão facilmente a informação, e JAMAIS ser vendido ou utilizado com objetivos financeiros.